गणित
अभ्यास पुस्तिका

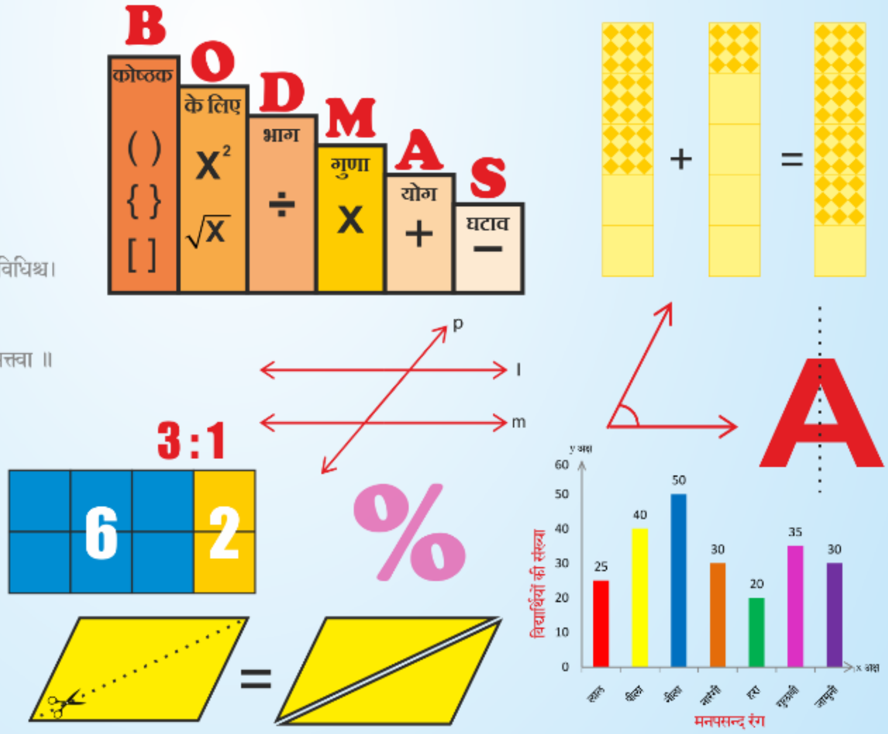
(वैदिक गणित एवं संस्कृत ज्ञान प्रणाली की गणितीय संकल्पनाओं के साथ)

वेद-भूषण - II वर्ष / प्रथमा - II वर्ष / कक्षा सातवीं

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

(शिक्षा मन्त्रालय भारत सरकार द्वारा स्थापित एवं मान्यता प्राप्त)

योगे युतिः स्यात् क्षययोः स्वयोर्वा धनर्णयोरन्तरमेव योगः ।
शून्यर्णयोः खधनयोः खशून्ययोर्वा वधः शून्यम् ।
योगोऽन्तरं तुल्यहरांशकानां कल्प्यो हरो रूपमहारराशेः।
अन्योन्यहाराभिहतौ हरांशौ राश्योः समच्छेदविधानमेवम् ।
मिथो हराभ्यामपवर्त्तिताभ्यां यद्वा हरांशौ सुधियात्र गुण्यौ॥
छेदं लवं च परिवर्त्त्य हरस्य शेषः कार्योऽथ भागहरणे गुणनाविधिश्च।
यावत्तावत्कल्प्यमव्यक्तराशेर्मानं तस्मिन् कुर्वतोद्दिष्टमेव ।
तुल्यौ पक्षौ साधनीयौ प्रयत्नात् त्यक्त्वा क्षिप्त्वा वापि संगुण्य भक्त्वा ॥
त्रैराशिकफलराशिं तमथेच्छाराशिना हतं कृत्वा।
लब्धं प्रमाणभाजितं तस्मादिच्छाफलमिदं स्यात्॥
वर्गस्समचतुरस्रः फलञ्च सदृशद्वयस्य संवर्गः॥
यो अक्रन्दयत् सलिलं महित्वा योनिं कृत्वा त्रिभुजं शयानः।
वत्स कामदुघो विराजः स गुहा चक्रे तन्वः पराचैः॥
त्रिभुजस्य फलशरीरं समदलकोटीभुजार्धसंवर्गः ।
द्वादश प्रधश्चक्रमेकं त्रीणि नभ्यानि क उ तच्चिकेत ।
तस्मिन्त्साकं त्रिशता न शङ्कवोऽर्पिता षष्टिर्न चलाचलासः।।
चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्राणाम् ।
अयुतद्वयविष्कम्भस्यासन्नो वृत्तपरिणाहः ॥



एकाधिकेन पूर्वेण | एकन्यूनेन पूर्वेण | विनुकलम् | विलोकनम्

पूरणापूरणाभ्याम् | सङ्कलन-व्यवकलनाभ्याम् | निखिलं नवतश्चरमं दशतः

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in

11 से 20 तक पहाड़े

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
110	120	130	140	150	160	170	180	190	200

विषयानुक्रमणिका

क्र. सं.	अध्याय का नाम	पृष्ठ संख्या
1.	पूर्णाङ्क	3 – 10
2	भिन्न एवं दशमलव	11 – 24
3	वैदिक गणित	25 – 42
4	आंकड़ो का प्रबन्धन	43 – 53
5	सरल समीकरण	54 – 59
6	रेखा एवं कोण	60 – 68
7	राशियों की तुलना	69 – 80
8	परिमेय संख्या	81 – 87
9	परिमाप और क्षेत्रफल	88 – 96
10	सममिति	97 – 102

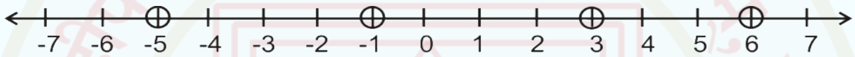
❖ परिशिष्ट 103

अध्याय 1

पूर्णाङ्क

- पूर्णाङ्क संख्या, पूर्ण संख्या (0, 1, 2, 3, ……) के समूह में ऋणात्मक संख्या (– 1, – 2, – 3, – 4, ……) को सम्मिलित करने पर पूर्णाङ्क संख्या का समूह प्राप्त होता है।

पुनरावलोकन – निम्न संख्या रेखा पर पूर्णाङ्कों को प्रदर्शित किया गया है।



उपर्युक्त दी गई संख्या रेखा पर कुछ अङ्कित पूर्णाङ्क –5, –1, 3 एवं 6 है। अङ्कित पूर्णाङ्कों को आरोही क्रम (बढ़ते क्रम) में लिखें। हम जानते हैं कि संख्या रेखा पर दायीं ओर जाने पर संख्या बढ़ती है। अतः, $-4 < -2 < 1 < 5$

- पूर्णाङ्क संख्याओं के योगफल से प्राप्त परिणाम-

1. यदि दो धनात्मक पूर्णाङ्कों को जोड़ा जाता है तो हमें एक धनात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है। **उदाहरण :** $(+2) + (+4) = +6$
2. जब दो ऋणात्मक पूर्णाङ्कों को जोड़ा जाता है तो हमें ऋणात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है। **उदाहरण :** $(-2) + (-4) = -6$
3. जब एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णाङ्क को जोड़ा जाता है तब बड़े पूर्णाङ्क में से छोटा पूर्णाङ्क घटाया जाता है, साथ ही बड़ी पूर्णाङ्क संख्या का चिह्न लगाया जाता है। **उदाहरण :** $(+4) + (-2) = +2$
4. एक ऋणात्मक संख्या का ऋणात्मक एक धनात्मक प्राप्त होता है। **उदाहरण :** $-(-4) = +4$

पूर्णाङ्क संख्या के गुणधर्म

- **योग के लिये** : पूर्णाङ्क संख्याओं में योग के सापेक्ष संवरक गुण, साहचर्य गुण एवं क्रमविनिमेय गुण का पालन करती है । सभी पूर्णाङ्क संख्याओं के लिये 0 योज्य तत्समक है।
- **गुणन के लिये** : पूर्णाङ्क संख्याओं में गुणन के सापेक्ष संवरक गुण, साहचर्य गुण एवं क्रमविनिमेय गुण का पालन करती है । 1 पूर्णाङ्क संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक है।

पूर्णाङ्कों के योग – ऋणात्मक संख्याओं का योग ऋणात्मक तथा धनात्मक संख्याओं का योग धनात्मक होता है। धनात्मक एवं ऋणात्मक संख्याओं का अन्तर ही योग होता है। **उदाहरणार्थ :**

1. $(+3) + (4) = +7$ 2. $(-4) + (-3) = -7$

पूर्णाङ्कों के व्यवकलन (अन्तर) - यदि घटने वाली राशि (संशोध्यमान) धनात्मक हो तो ऋणात्मक तथा ऋणात्मक हो तो धनात्मक हो जाती है तथा बाद में "योग युति..... स्यात" के आधार पर हल प्राप्त करते हैं।**उदाहरणार्थ :**

1. $(-3) - (-3) = -3 + 3 = 0$
2. $(+4) - (+5) = 4 - 5 = -1$

पूर्णाङ्कों की तुलना - आपको स्मरण होगा कि तुलना चिह्न ($<$, $>$ एवं $=$)का प्रयोग कर हम दो पूर्णाङ्क संख्याओं की तुलना करते हैं ।

1.	– 14	<	14		3.	13	>	– 15
2.	13	>	10		4.	20	<	10

सोचिए -

1. फ्रीज में बर्फ को जमने के लिए कितने तापमान की जरूरत होती है ?
2. गर्म पानी को उबालने के लिए अधिक तापमान की आवश्यकता होती है।

पूर्णाङ्कों का गुणन - ऋणात्मक और धनात्मक अङ्क का गुणा करने पर गुणनफल ऋणात्मक प्राप्त होता है। दो धनात्मक एवं ऋणात्मक अङ्कों का गुणनफल धनात्मक प्राप्त होता है, साथ ही शून्य का किसी धनात्मक या ऋणात्मक अङ्क का गुणनफल शून्य प्राप्त होता है।

(i) धनात्मक पूर्णाङ्कों का ऋणात्मक पूर्णाङ्क से गुणन -

$$3 \times (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$$

गुणन कीजिए : $3 \times (-5) =$ $5 \times (-3)$

हल : $3 \times (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$

या $5 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15$

- "धनात्मक पूर्णाङ्क को ऋणात्मक पूर्णाङ्क से गुणा करने पर ऋणात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है।"

(ii) दो ऋणात्मक पूर्णाङ्कों का गुणन - दो ऋणात्मक पूर्णाङ्कों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णाङ्क होता है। हम दो ऋणात्मक संख्याओं के रूप में गुणा करते हैं तथा गुणनफल के पूर्व में (+) धनात्मक का चिह्न लगाते हैं। **उदाहरण :**

(i) $(-10) \times (-7) = +70 = 10 \times 7$

- व्यापक रूप में दो धनात्मक पूर्णाङ्कों a तथा b के लिए-

$$a \times b = (-a) \times (-b) = (-a) . (-b)$$

(iii) **तीन या अधिक ऋणात्मक संख्या का गुणन** - दो ऋणात्मक पूर्णाङ्कों का गुणनफल धनात्मक पूर्णाङ्क होता है। गुणन की क्रमविनिमेयता - पूर्ण संख्याओं के लिए गुणन क्रमविनिमेय होता है । क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णाङ्कों के लिए भी गुणन क्रमविनिमेय है ।

क्र.	कथन - 1	कथन - 2	निष्कर्ष
1	$7 \times 5 = 35$	$5 \times 7 = 35$	$7 \times 5 = 5 \times 7$
2	$(-1) \times 3 = -3$	$3 \times (-1) = ...$	

$$a \times b = b \times a$$

रोचक तथ्य - निम्नलिखित कथनों एवं परिणामी गुणनफलों पर विचार कीजिए :-

$+1 = (-1) \times (-1)$

$-1 = (-1) \times (-1) \times (-1)$

$+1 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$

$-1 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$

$+1 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$

- उपर्युक्त गुणनफल के परिणामों से अर्थ हुआ, कि यदि पूर्णाङ्क (-1) को सम संख्या बार गुणन किया जाए, तो गुणनफल परिणाम $(+1)$ है और यदि पूर्णाङ्क (-1) को विषम संख्या बार गुणा किया जाए, तो गुणनफल परिणाम (-1) है ।

आइए , निम्न उदाहरणों के हल देखते हैं -

(i) $(-3) \times (-4) = 12$

(ii) $(-3) \times (-2) \times (-2) = [(-3) \times (-2)] \times (-2)$

$= (6) \times (-2) = -12$

(iii) $(-3) \times (-3) \times (-2) \times (-1)$

$$[(-3) \times (-3)] \times [(-2) \times (-1)]$$

$$= \quad 9 \times 2 \quad = \quad 18$$

उपर्युक्त उदाहरणों को देखकर हम कह सकते हैं, कि

- हम कह सकते हैं कि "यदि गुणन के लिए ऋणात्मक पूर्णाङ्कों की संख्या सम हो, तो उनका गुणनफल धनात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है तथा ऋणात्मक पूर्णाङ्कों की संख्या विषम होने पर उनके गुणनफल का परिणाम ऋणात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त होता है।"

पूर्णाङ्कों का शून्य से गुणन - किसी भी धनात्मक या ऋणात्मक पूर्णाङ्क को शून्य से गुणा करने पर शून्य प्राप्त होता है। शून्य का शून्य से गुणा करने पर गुणनफल शून्य प्राप्त होता है।

उदाहरण : गुणन करें: $(-3) \times (-2) \times (-1) \times 0$

हल : $[-3 \times -2] \times [(-1) \times 0] \quad = \quad 6 \times 0 \quad = \quad 0$

पूर्णाङ्कों का विभाजन (भाग) – धनात्मक को धनात्मक या ऋणात्मक को ऋणात्मक पूर्णाङ्क से भाग देने पर भागफल धनात्मक संख्या प्राप्त होता है साथ ही धनात्मक को ऋणात्मक अथवा ऋणात्मक को धनात्मक संख्या से भाग देने पर भागफल ऋणात्मक संख्या प्राप्त होती है।

नोट : पूर्णाङ्कों का भाग भी पूर्ण संख्याओं की तरह ही करते हैं केवल हमें यह ध्यान रखना होता है कि परिणाम धनात्मक या ऋणात्मक होगा। व्यापक रूप में-

$$\mathbf{a \div (-b) = (-a) \div b}$$ जहाँ b या – b शून्य नहीं है।

1) ऋणात्मक पूर्णाङ्क ÷ धनात्मक पूर्णाङ्क = ऋणात्मक पूर्णाङ्क

उदाहरण : $(-10) \div 2 = \frac{(-10)}{2} = (-5)$

2) धनात्मक पूर्णाङ्क ÷ ऋणात्मक पूर्णाङ्क = ऋणात्मक पूर्णाङ्क

उदाहरण : $20 \div (-2) = \frac{20}{(-2)} = (-10)$

3) धनात्मक पूर्णाङ्क ÷ धनात्मक पूर्णाङ्क = धनात्मक पूर्णाङ्क

उदाहरण : $60 \div 2 = \frac{60}{2} = 30$

4) ऋणात्मक पूर्णाङ्क ÷ ऋणात्मक पूर्णाङ्क = धनात्मक पूर्णाङ्क

उदाहरण : $(-100) \div (-50) = \frac{(-100)}{(-50)} = 2$

BODMAS (कोकाभागुयोघ):

का करके पुनि भाग कर, फिर गुण लेह सुजान ।

ता पीछे धन ऋण कर, भिन्न रीति यह जान ॥

BODMAS (कोकाभागुयोघ) नियम विभिन्न गणितीय समस्याओं जैसे सरलीकरण को हल करने की युक्ति में से एक है।

BODMAS (कोकाभागुयोघ)

को	=	कोष्ठक	:	( ) , { }, [ ]
का	=	के लिए *	:	$(\ )^2$ या $\sqrt{\ }$
भा	=	भाग	:	÷
गु	=	गुणा	:	×
यो	=	योग	:	+
घ	=	घटाव	:	−

* = घाताङ्क

निम्न को सरल करें –

उदाहरण 1: $3 \times (-2) + 1$

हल : $[3 \times (-2)] + 1$

$= -6 + 1$

$= -5$

उदाहरण 2: $(-4) \div 2 + 3 - 1$

हल : $-2 + 3 - 1$

$= -3 + 3$

$= 0$

उदाहरण 3: $15 \div 3 \times 4 + 3 - 1$

हल : सर्वप्रथम क्रमशः $(\div, \times, +, -)$

$= 15 \div 3 \times 4 + 3 - 1$

तब, $= 5 \times 4 + 3 - 1$

$= 20 + 3 - 1$

$= 23 - 1$

$= 22$

उदाहरण 4: $2 - 3 \times 4 + 18 \div 3$

हल : सर्वप्रथम क्रमशः $(\div, \times, +, -)$

$= 2 - 3 \times 4 + 6$

$= 2 - 12 + 6$

$= 2 - 6$

$= -4$

अभ्यास प्रश्नावली - 1

1. हल करें -

   1. $(-4) + (+3)$
   2. $15 - 8 + 2$
   3. $400 + (-100) + 200$
   4. $23 - 7 - 5$

2. निम्न में तुलना चिह्न $(<, =$ एवं $>)$ लगाइए -

   1. $-4 + 3 + 2$ $\boxed{}$ $1 + 3 + 4$
   2. $30 + (-4) + (-9)$ $\boxed{}$ $4 + (-9) + 30$

3. रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए -

1. $15 - 3 = 8 - ......$

2. $18 + ... = 18$

3. $8 - ...... = 0$

4. निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात करें -

(i) $4 \times (-3)$ (ii) $12 \times (-1)$

(iii) 30×10 (iv) $4 \times (-3) \times (-2)$

5. निम्न सवालों को हल कर भागफल ज्ञात करें -

(i) $(-25) \div 5$ (ii) $(-35) \div (-35)$

(iii) $15 \div (-3)$ (iv) $(-28) \div (7)$

6. निम्न को BODMAS का प्रयोग हल करें -

(1) $2 \times (-4) + 3$ (2) $(-8) \div 2 + 3$

(3) $4 \times (-2) + 3 \times (-1)$ (4) $5 \times (-4) - 20 + 10$

अध्याय 2

भिन्न एवं दशमलव

➢ निम्न में से उचित एवं अनुचित (विषम) भिन्न को पृथक करें।

$$\frac{8}{9},\ \frac{5}{3},\ \frac{19}{6},\ \frac{25}{3},\ \frac{11}{6},\ \frac{3}{4},\ \frac{19}{12}$$

$$\frac{5}{9},\ \frac{7}{3},\ \frac{19}{16},\ \frac{9}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{4},\ \frac{19}{17}$$

उपर्युक्त भिन्न संख्याओं में से विषम भिन्नों को मिश्रित भिन्न में बदलिए।

उदाहरण : भिन्न $\frac{3}{5}$ की तीन तुल्य भिन्न लिखिए।

हल : $\frac{3}{5}$ की तुल्य तीन भिन्न

(i) $\frac{3}{5} = \frac{3\times2}{5\times2} = \frac{6}{10}$

(ii) $\frac{3}{5} = \frac{3\times3}{5\times3} = \frac{9}{15}$

(iii) $\frac{3}{5} = \frac{3\times4}{5\times4} = \frac{12}{20}$

अतः, $\frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20}$, $\frac{3}{5}$ की तुल्य भिन्न हैं।

समान भिन्न संख्या के योग एवं व्यवकलन(अन्तर) :

समान हर वाली भिन्न संख्याओं में अंश के मध्य योग एवं अन्तर किया जाता है तथा हर (समान हर) पूर्ववत् रहता है। हर न होने पर, हर के स्थान पर 1 की कल्पना करना चाहिये। **जैसे :** $\frac{3}{1}, \frac{5}{1}, \frac{4}{1}$

उदाहरण : शुभम एवं बुलबुल ने अपने घर की दीवार का क्रमशः $\frac{3}{5}$ एवं $\frac{1}{5}$ भाग रंगकर्म (पेंट) किया तब बताइये दोनों ने मिलकर कुल कितना रंगकर्म (पेंट) किया।

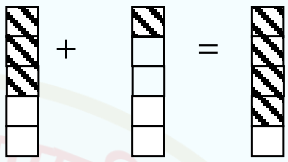
हल : शुभम द्वारा किया गया रंगकर्म (पेंट) $= \frac{3}{5}$

बुलबुल द्वारा किया गया रंगकर्म (पेंट) $= \frac{1}{5}$

तब प्रश्नानुसार, दोनों द्वारा किया गया दीवार का रंगकर्म (पेंट)

$$= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$$

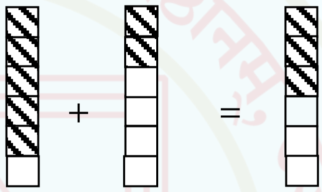


अर्थात्, दोनों ने मिलकर $\frac{4}{5}$ भाग दीवार का रंगकर्म (पेंट) किया।

उदाहरण : $\frac{5}{6}$ में से $\frac{2}{6}$ को घटाइये।

हल : $\frac{5}{6} - \frac{2}{6}$

$$= \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6} \text{ या } \frac{1}{2}$$



भिन्नों का योग एवं व्यवकलन (अन्तर) – (जब हर समान न हो)

सर्वप्रथम भिन्न के हर को तुल्य हर (समान हर) बनाया जाता है तथा बाद में यदि भिन्नों को योग करना हो, तो अंशों का योग कर नीचे में तुल्य हर को रखने से योग होता है और यदि अन्तर करना हो तो अंशों के मध्य अन्तर कर नीचे में तुल्य हर को रखने पर भिन्नों का अन्तर ज्ञात करते हैं।

उदाहरण : $\frac{2}{5}$ और $\frac{1}{4}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$ (हर 5 और 4 का लघुत्तम समापवर्त्य = 20)

अतः, $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{2\times4}{5\times4} + \frac{1\times5}{4\times5} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{8+5}{20} = \frac{13}{20}$

उदाहरण : $\frac{5}{6}$ में से $\frac{1}{5}$ को घटाइये।

हल : यहाँ दी गई भिन्न $\frac{5}{6}$ एवं $\frac{1}{5}$ के हर समान नहीं होने के कारण सर्वप्रथम तुल्य भिन्न बनाने की आवश्यकता है।

$\frac{5}{6} - \frac{1}{5}$ (हर 6 व 5 का लघुत्तम समापवर्त्य = 30 है।)

अतः, $\frac{5\times5}{6\times5} - \frac{1\times6}{5\times6}$

$= \frac{25}{30} - \frac{6}{30} = \frac{25-6}{30} = \frac{19}{30}$

उदाहरण : $1\frac{1}{6} - 2\frac{1}{4}$ ज्ञात कीजिए।

हल : $1\frac{1}{6} - 2\frac{1}{4}$

या $\frac{7}{6} - \frac{9}{4}$ (हर 6 व 4 का लघुत्तम समापवर्त्य = 12 है।)

$= \frac{7\times2}{6\times2} - \frac{9\times3}{4\times3} = \frac{14}{12} - \frac{27}{12} = \frac{14-27}{12} = \frac{-13}{12}$

भिन्न का भिन्न से गुणन - दो भिन्नों का गुणन करने के लिये उनके अंशों एवं हरों को अलग-अलग गुणा किया जाता है और फिर गुणनफल को निम्न रूप में लिखा जाता है –

$$\textbf{भिन्नों का गुणनफल} = \frac{\textbf{अंशों का गुणनफल}}{\textbf{हरों का गुणनफल}}$$

एक भिन्न का पूर्ण संख्या से गुणा

उदाहरण: यदि हम 2 का $\frac{1}{5}$ में गुणा करना है अर्थात् $\frac{1}{5}$ को दो बार जोड़ना है।

हल: $2 \times \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5}$

नोट : भिन्न में 'का' (×) गुणन को निरूपित करता है।

उदाहरण : 20 का $\frac{1}{2}$ कितना होगा।

हल : 20 का $\frac{1}{2}$ $= 20 \times \frac{1}{2} = \frac{20}{2} = 10$

उदाहरण : 20 का $3\frac{1}{2}$ कितना होगा।

हल : 20 का $3\frac{1}{2} = 20 \times \frac{7}{2} = \frac{20 \times 7}{2} = \frac{140}{2} = 70$

एक भिन्न का दूसरे भिन्न में गुणन – भिन्न संख्याओं के गुणन में अंशों के गुणनफल को, हरों के गुणनफल से भाग देने पर भिन्न संख्याओं का गुणनफल प्राप्त होता है।

➢ दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल उन दोनों संख्याओं में से प्रत्येक से बड़ा होता है। **उदाहरणार्थ -** $3 \times 4 = 12$ और $12 > 4$, $12 > 3$

उपर्युक्त उदाहरण को समझकर दो भिन्नों को गुणन कीजिए एवं प्राप्त गुणनफल के मान को दिए गए भिन्नों से तुलना कीजिए ? आइये ,निम्न सारणी से दो उचित भिन्नों के गुणनफल की चर्चा करते हैं।

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$	$\frac{2}{3} < \frac{8}{15}$, $\frac{4}{5} < \frac{8}{15}$	**गुणनफल प्रत्येक भिन्न से कम है ।**
$\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{...}{...}$	… … … … , … … … …	
$\frac{3}{5} \times \frac{...}{8} = \frac{21}{40}$	… … … … , … … … …	
$\frac{2}{...} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$	… … … … , … … … …	

आप देखते हैं कि जब दो उचित भिन्नों को गुणा किया जाता है तो गुणनफल दोनों भिन्नों से कम होता है। अर्थात् दो उचित भिन्नों के गुणनफल का मान दोनों में से प्रत्येक से छोटा होता है।

उदाहरण: $\frac{2}{3}$ और $\frac{7}{5}$ भिन्न का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हम देखते हैं कि : $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

यहाँ, $\frac{14}{15} < \frac{7}{5}$ और $\frac{14}{15} > \frac{2}{3}$

प्राप्त गुणनफल($\frac{14}{15}$), गुणन में उपयोग किए गए विषम भिन्न $\frac{7}{5}$ से कम है और उचित भिन्न $\frac{2}{3}$ से अधिक है।

प्रयास कीजिए : निम्नलिखित रिक्त-स्थानों को पूर्ण कीजिए।

(अ) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1 \times 1}{2 \times 7} = \frac{\dots}{\dots}$ (ब) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

(स) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ (द) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

उदाहरण : राम एक घण्टे में किसी पुस्तक का $\frac{1}{3}$ भाग पढ़ता है। वह $2\frac{1}{2}$ घण्टों में पुस्तक का कितना भाग पढ़ लेगा ?

हल : राम द्वारा 1 घण्टे में पुस्तक का पढ़ा हुआ भाग = $\frac{1}{3}$

इसलिए, $2\frac{1}{2}$ घण्टे में उसके द्वारा पुस्तक का पढ़ा हुआ भाग = $2\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

आइए, हम $\frac{5}{2} \times \frac{1}{3}$ गुणनफल ज्ञात करते हैं। हम जानते हैं कि $\frac{5}{2} = \frac{1}{2} \times 5$

इसलिए, $\frac{5}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 5 = \frac{1}{6} \times 5 = \frac{5}{6}$

अतः, राम $2\frac{1}{2}$ घण्टों में पुस्तक का $\frac{5}{6}$ भाग पढ़ेगा।

1. **उचित भिन्नों के मध्य गुणन ज्ञात कीजिए –**

(i) $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1 \times 2}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$

2. **अनुचित(विषम) भिन्नों के मध्य गुणन ज्ञात कीजिए -**

(i) $\frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{7 \times 3}{5 \times 2} = \frac{21}{10}$

3. **मिश्र भिन्न के मध्य गुणन ज्ञात कीजिए -**

(i) $1\frac{2}{3} \times 3\frac{2}{2}$

$= \frac{5}{3} \times \frac{8}{2} = \frac{5 \times 8}{3 \times 2} = \frac{40}{6}$ या $\frac{20}{3}$

उदाहरण : एक आश्रम में कुल 25 विद्यार्थियों में से विद्यार्थियों का $\frac{1}{5}$ भाग सामवेद तथा कुल विद्यार्थियों का $\frac{3}{5}$ भाग अथर्ववेद का अध्ययन करते हैं, तब बताइये:

(i) कितने विद्यार्थी सामवेद का अध्ययन करते हैं ?

(ii) कितने विद्यार्थी अथर्ववेद का अध्ययन करते हैं ?

हल : आश्रम में अध्ययन करने वाले कुल विद्यार्थियों की संख्या = 25 हैं।

(i) सामवेद में कुल विद्यार्थियों का $\frac{1}{5}$ भाग अध्ययन करता है। तब,

$= 25$ का $\frac{1}{5} = 25 \times \frac{1}{5} = 5$

अतः, सामवेद का अध्ययन करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 5 हैं।

(ii) अथर्ववेद में कुल विद्यार्थियों का $\frac{3}{5}$ भाग अध्ययन करता है। तब,

$= 25$ का $\frac{3}{5} = 25 \times \frac{3}{5} = 15$

अत:,अथर्ववेद का अध्ययन करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 15 हैं।

भिन्नों का व्युत्क्रम (प्रतिलोम) - ऐसी शून्येतर ($\neq$ **0**) संख्याएँ जिनका परस्पर गुणनफल 1 है। वे संख्याएँ एक-दूसरे के व्युत्क्रम भिन्न कहलाती हैं। भिन्न $\frac{2}{5}$ के अंश एवं हर को परस्पर बदलने पर $\frac{5}{2}$ प्राप्त होता है।अतः, $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \mathbf{1}$ यहाँ $\frac{2}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{5}{2}$ है।

➢ **सोचिए :** $\frac{1}{3}$ का व्युत्क्रम क्या होगा ?

एक भिन्न का दूसरी भिन्न से भाग : भिन्न संख्या के भाग के लिए प्रथम भिन्न संख्या को दूसरी भिन्न संख्या के व्युत्क्रम (अंश एवं हर को परस्पर बदलने पर) से गुणन कर भागफल प्राप्त होता है।

(i) **पूर्ण संख्या का भिन्न से भाग -**

उदाहरण : $4 \div \frac{3}{5}$ हम जानते हैं, कि $\frac{3}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{5}{3}$ होता है।

हल : $4 \times \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$

(ii) **पूर्ण संख्या से भिन्न का भाग -**

उदाहरण : $\frac{3}{2} \div 4$ हम जानते हैं,कि 4 का व्युत्क्रम $\frac{1}{4}$ होता है।

हल : $\frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

(iii) **एक भिन्न से दूसरे भिन्न का भाग -**

उदाहरण : $\frac{1}{3} \div \frac{5}{4}$ हम जानते हैं ,कि $\frac{5}{4}$ का व्युत्क्रम $\frac{4}{5}$ होता है।

हल : $= \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{1\times4}{3\times5} = \frac{4}{15}$

(iv) **मिश्र भिन्नों के मध्य भाग -**

$3\frac{1}{2} \div 2\frac{5}{3}$ मिश्र-भिन्नों को सरल करने पर-

$= \frac{7}{2} \div \frac{11}{3}$ हम जानते हैं, कि $\frac{11}{3}$ का व्युत्क्रम $\frac{3}{11}$ होता है।

$= \frac{7}{2} \times \frac{3}{11} = \frac{7\times3}{2\times11} = \frac{21}{22}$

दशमलव संख्याओं से सम्बन्धित निम्न सारणी पूर्ण करें-

3.34 = तीन दशमलव तीन चार

निम्न सारणी को देखिए और रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए -

सैकड़ा 100	दहाई 10	इकाई 1	दशांश $\frac{1}{10}$	शतांश $\frac{1}{100}$	सहस्रांश $\frac{1}{1000}$	संख्या
4	2	5	3	2	1	425.321
6	.....	8	4	.....	8	628.428

दशमलव संख्या का विस्तारित रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$421.321 = 4\times100 + 2\times10 + 5\times1 + 3\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{1}{100} + 1\times\frac{1}{1000}$$

दशमलव संख्या की तुलना : छात्रावास से मन्दिर की दूरी 12.37 मीटर तथा विद्यालय की दूरी 12.48 मीटर है तो बताइये छात्रावास से मन्दिर और विद्यालय में से किसकी दूरी अधिक है ? यदि हम उक्त स्थिति पर विचार करें तब -

1. दशमलव के बायीं ओर की संख्या समान है। अतः हम दशमलव के दायीं ओर के अङ्कों की तुलना करते हैं।

2. दशांश के स्थान से शुरु करते हुए दशमलव बिन्दु के दायीं तरफ के अङ्कों की तुलना करने पर हम यह देखते हैं, कि $3 < 4$

   अतः, $12.37 < 12.48$

   अतः छात्रावास से विद्यालय की दूरी अधिक है।

➢ मुद्रा, लम्बाई और भार की छोटी इकाई को बड़ी इकाई में परिवर्तित करने के लिए हम दशमलव का प्रयोग करते हैं।

13 ग्राम $= \frac{13}{1000}$ कि.ग्रा. = 0.013 कि.ग्रा.

138 पैसे $= \frac{138}{100}$ रुपये = 1.38 रुपये

341 मीटर $= \frac{341}{1000}$ कि.मी = …….. कि.मी.

याद रखें -

1 कि.मी = 1000 मीटर

1 कि.ग्रा. = 1000 ग्रा.

1 रुपये = 100 पैसे

1 मीटर = 100 से.मी.

दशमलव संख्या योग एवं व्यवकलन (अन्तर)

उदाहरण: संख्या 21.37 एवं 13.12 का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{array}{r} 21.37 \\ +\ 13.12 \\ \hline \boxed{34.49} \end{array}$$

उदाहरण : संख्या 3.4 और 12.460 को जोड़िए -

हल :

$$\begin{array}{r} 3.400 \\ +\ 12.460 \\ \hline \boxed{15.860} \end{array}$$

उदाहरण : 5.34 में से 2.78 घटाइये ।

हल :

	इकाई		दशांश	शतांश
	5	.	3	4
–	2	.	7	8
	2	.	5	6

उदाहरण : 3 में से 0.34 घटाइये।

हल:

	इकाई		दशांश	शतांश
	3	.	0	0
–	0	.	3	4
	2	.	6	6

ध्यान रखें - दशमलव के बाद कितने भी शून्य लगाने पर संख्या के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

उदाहरण : कृष्णा और प्रशान्त कुर्ते बनवाने के लिए 5 मीटर 75 से.मी. कपड़ा खरीदा। यदि कृष्णा को कुर्ता बनाने में 2 मीटर 50 से.मी. कपड़े की जरूरत होती है तो बताएँ कि प्रशान्त के कुर्ता सिलवाने के लिए कितना कपड़ा शेष बचा ?

हल : कुर्ते के लिए कुल खरीदा गया कपड़ा = 5 मीटर 75 से.मी.

कृष्णा के कुर्ते में काम आया कपड़ा = 2 मीटर 50 से.मी.

तब, प्रशान्त के लिए शेष बचा कपड़ा = 5.75 मीटर

– 2.50 मीटर

3.25 मीटर

अतः कुर्ता सिलवाने के बाद शेष बचा कपड़ा 3 मीटर 25 से.मी. है।

दशमलव संख्या के गुणन : जब किन्हीं दो दशमलव संख्याओं का गुणन, सर्वप्रथम पूर्ण संख्याओं की तरह गुणनफल ज्ञात कर गुण्य एवं गुणक में दशमलव के दाहिनी ओर से अङ्कों को गिनकर प्राप्त गुणनफल के दाहिनी ओर से कुल उतने ही अङ्कों के बाद दशमलव लगा देते हैं।

उदाहरण : गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : 1.1×1.2 (सर्वप्रथम हम पूर्ण संख्याओं कि तरह गुणा करते हैं।)

$11 \times 12 = 132$ (अब दशमलव के बाद के अङ्क गिनकर गुणनफल में दशमलव लगाते हैं।)

$1.1 \times 1.2 = 1.32$

उदाहरण : एक घर में प्रतिदिन 1.5 लीटर दूध लिया जाता है तो बताइये 15 दिनों में घर में कुल कितना दूध लिया गया ?

हल : 1 दिन में लिया दूध - 1.5 लीटर

प्रश्नानुसार,

15 दिनों में लिया गया दूध = 15 × 1.5 या 1.5 × 15

= 1.5 × 15 = 22.5 लीटर (दशमलव के बाद के अङ्क गिनकर दशमलव लगाने पर)

अतः 15 दिनों में 22 लीटर 500 मि.ली. दूध लिया गया।

इन्हें भी समझे - (1) 1.25 × 10 = 12.50

(2) 1.25 × 100 = 125.00

(3) 1.25 × 1000 = 1250.00

दशमलव संख्याओं के विभाजन - दो दशमलव संख्या के भाजन के लिए दोनों संख्याओं में दशमलव के बाद अङ्कों की संख्या समान कर दशमलव को हटा सकते हैं। उसके बाद सामान्य रीति से भाग देते हैं।

उदाहरण : 2.4 को 2 से भाग दीजिए।

हल : हम जानते हैं,कि 2.4 को $\frac{24}{10}$ के रूप में लिखा जा सकता है,क्योंकि 2.4 को विस्तारित रूप में $\left(2 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10}\right)$ में लिखा जाता है।

अतः , $2.4 \div 2$

$= \frac{24}{10} \div 2$

$= \frac{24}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{24\times1}{10\times2} = \frac{24}{20} = 1.2$

(भिन्नों के भाग में हमने सीखा कि भाग के लिए 2 के व्युत्क्रम $\frac{1}{2}$ से गुणा करना होगा।)

इन्हें भी समझे -

$42.31 \div 10 = 4.231$

$42.31 \div 100 = .4231$

$42.31 \div 1000 = 0.04231$

हम जानते हैं।

(1) दशमलव संख्या को भिन्न बनाना -

$4.2 = \frac{4.2}{10}$

(2) भिन्न संख्या को दशमलव में लिखें -

$\frac{32}{100} = 0.32$

- **किसी पूर्ण संख्या में दशमलव संख्या से भाग -**

उदाहरण: $32 \div 0.8$

हल : $32 \div \frac{8}{10} = 32 \times \frac{10}{8} = \frac{32\times10}{8} = \frac{320}{8} = 40$

- **किसी दशमलव संख्या में दशमलव संख्या से भाग -**

उदाहरण: $3.15 \div 0.5$

हल : $3.15 \div 0.5$

$$= \frac{3.15}{100} \div \frac{0.5}{10}$$

$$= \frac{315}{100} \times \frac{10}{5}$$

$$= \frac{315\times10}{100\times5}$$

$$= \frac{3150}{500}$$

$$= 6.3$$

अभ्यास प्रश्नावली - 2

1. **हल कीजिए -**

(i) $\frac{2}{3}+\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}$ (iii) $3\frac{1}{2}+2\frac{1}{7}$ (iv) $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}$

2. **गुणन कर सरलतम रूप में लिखिए -**

(i) $8\times\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{2}{3}\times 4$ (iii) $\frac{5}{3}$ का 6 (iv) 27 का $\frac{1}{3}$

(v) 0.08×3 (vi) 3×0.21 (vii) 3.73×0.10

3. **निम्न को सरल करें -**

(i) $18\div\frac{3}{2}$ (ii) $5\frac{3}{4}\div 4$ (iii) $2\frac{1}{3}\div\frac{3}{5}$ iv) $4\frac{1}{5}\div 2\frac{1}{3}$

(v) $1.25\div 0.5$ (vii) $0.48\div 0.4$

4.. निम्न संख्याओं का योगफल ज्ञात करें -

1) $\begin{array}{r} 3.5 \\ +\ 4.12 \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 3.123 \\ +\ 31.21 \\ \hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 3.45 \\ +\ 5.26 \\ \hline \end{array}$

5. निम्न संख्याओं का गुणनफल ज्ञात कीजिये -

1) $\begin{array}{r} 3.4 \\ \times\ 2.7 \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 4.57 \\ \times\ 4.31 \\ \hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 13.45 \\ -\ 12.20 \\ \hline \end{array}$

6. 48 कि.मी. से 40.7 कि.मी. कितना कम है ?

7. निम्न संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें -

1) 7×3.4	2) 81.2×2
3) 0.08×3	4) 3×0.21
5) 3.73×0.10	6) 0.37×10
7) 1.42×100	8) 3.42×100
9) 14.3×1000	10) 1.42×1000

8. एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी लम्बाई 3.4 से.मी. एवं चौड़ाई 1.2 से.मी. है।

9. निम्न संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें -

1) 3.4×4.2	2) 6.25×2.5	3) 2.4×0.2
4) 12.3×1.2	5) 0.08×3.4	6) 13.4×0.8

10. निम्न संख्याओं का भागफल ज्ञात कीजिए।

1) $0.8 \div 2$	2) $0.42 \div 6$	3) $4.2 \div 10$
4) $98.6 \div 10$	5) $86 \div 100$	6) $8.05 \div 100$
7) $1.3 \div 1000$	8) $4.32 \div 1000$	

11. निम्न संख्याओं का भागफल ज्ञात कीजिए।

1) $1.2 \div 0.4$	2) $3.6 \div 0.6$
3) $1.25 \div 0.5$	4) $0.48 \div 0.4$

अध्याय 3

वैदिक गणित

➢ आइये, पूर्व कक्षा में किए गए अध्ययन को दोहराते हैं।

1. संख्या 18 का एकाधिकेन 19 है ।
2. संख्या 135 में 3 का एकाधिकेन पूर्वेण करने पर बनने वाली नवीन संख्या 235 होगी।
3. संख्या 105 का एकन्यूनेन 104 होता है।
4. संख्या 1345 में संख्या 4 का एकन्यूनेन पूर्वेण करने पर बनने वाली नवीन संख्या 1245 होगी।
5. विचलन –

(आधार : 10)	(आधार : 100)
13 का विचलन = + 3	102 का विचलन = + 02
95 का विचलन = – 5	103 का विचलन = + 03

6. विनकुलम् संख्या –

- **सामान्य संख्या को विनकुलम् संख्या में बदलना -**

1. 7 का विनकुलम् संख्या = 10 – 3 = $1\bar{3}$

- **विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या में बदलना -**

1. $3\bar{4}5\bar{3}$ विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या = 2647

7. गुणन करें -

विलोकनम् सूत्र

34×11

$= 0\ [\ 3\ \ 4\ ]\ 0$

$0 + 3 \,/\, 3 + 4 \,/\, 4 + 0$

$3 \,/\, 7 \,/\, 4$

374

अन्त्ययोर्दशकेऽपि सूत्र

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 35 \\ \hline \boxed{1225} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 37 \\ \times\ 33 \\ \hline \boxed{1221} \end{array}$$

- **सङ्कलन (योग) :**

पिछली कक्षा में आपने वैदिक गणित के सूत्र एकाधिकेन से योग करना सीखा था।

जैसे :

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 4 & 5 \\ & \dot{1} & 8 & 3 \\ + & 3 & \dot{5} & 7 \\ \hline 0 & 8 & 8 & 5 \end{array}$$

[$\dot{5}$ का एकाधिकेन = 6]

आइये , अब हम ओर दो सूत्रों से योगफल ज्ञात करना सीखें।

1. **पूरणापूरणाभ्याम् सूत्र -** संख्याओं के ऐसे युग्म बनाये, जिससे संख्याएँ 10 के गुणज में बन जाए। (10 के गुणज : 10, 20, 30, 40, 50 ....)

उदाहरण : 26 + 14 + 58 + 13 + 22 + 17 का योग कीजिए।

हल : 26 + 14 + 58 + 13 + 22 + 17

= (26 + 14) + (58 + 22) + (13 + 17)

= 40 + 80 + 30

= 150 (अब हम आसानी से योग कर सकते है।)

उदाहरण : हम पूरणापूरणाभ्याम् में इस विधि से हल कर सकते हैं।

					मौखिक रूप से जोड़कर लिखें।
	3	2	4		$300 + 400 + 400 + 100 = 1200$
	4	3	6		$20 + 30 + 30 + 20 = 100$
	4	3	4		$4 + 6 + 4 + 3 = 17$
+	1	2	3		

$= \quad 1200 + 100 + 17 \quad = \quad 1317$

नोट :- उपर्युक्त पद्धति से योग करने की विधि किसी वैदिक गणित की पुस्तक से नहीं दी गई है।

2. **सङ्कलन-व्यवकलनाभ्याम् सूत्र द्वारा योग करना** – इस सूत्र में संस्कृत के दो शब्द सम्मिलित है - सङ्कलन (जोड़) और व्यवकलन (अन्तर) यह सूत्र वहाँ प्रयोग किया जाता है। जहाँ संख्याओं के युग्म आधार (10 के गुणज) नहीं बनाते इस विधि में हम पूर्ण संख्याओं तक पहुँचते हैं।

- **उदाहरण :** योगफल ज्ञात करें : $26 + 17 + 8 + 37 + 11$

हल : संख्याओं को पूर्ण बनाने के लिए जोड़ते एवं घटाते हैं ।

$= \quad (20 + 6) + (20 - 3) + (10 - 2) + (40 - 3) + (10 + 1)$

$= \quad (20 + 20 + 10 + 40 + 10) + (6 - 3 - 2 - 3 + 1)$

$= \quad 100 + (-1) \quad = \quad 100 - 1 \quad = \quad 99$

- **व्यवकलन (अन्तर)** - वैदिक गणित के सूत्र निखिलं नवतः चरमं दशतः का अर्थ है । 'सभी नौ और अन्तिम दस से' आइये उक्त सूत्र के प्रयोग से हम व्यवकलन करना सीखते हैं ।

आइये, वैदिक गणित की इस विधि में बायीं ओर के प्रत्येक शून्य के बदले में 9 लिखें ओर अन्तिम शून्य के स्थान पर 10 लिखें। शून्य के पहले एक दम बायीं ओर का अङ्क 1 कम हो जाता है।

उदाहरण : 1000 में से 689 को घटाइये।

हल:

1	0	0	0		0	9	9	10
–	6	8	9	इसे बदलने पर	–	6	8	9
					0	3	1	1

उदाहरण : 7000 और 689 का अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल:

7	0	0	0	0	0		6	9	9	9	9	10
–	1	8	3	5	7	⇔	–	1	8	3	5	7
							6	8	1	7	4	3

उदाहरण : संख्या 856 में से 387 घटाइये ।

हल : 856 – 387

चरण 1: यहाँ, $6 < 7$ इसलिए अन्तर $7 - 6 = 1$ का पूरक लेते हैं । पूरक (परममित्र) 10 से लिया जाएगा । अतः 1 का पूरक 9 है, जो इकाई स्थान पर लिखा जाएगा ।

$$\begin{array}{rccc} & & & (10) \\ & 8 & 5 & 6 \\ - & 3 & 8 & 7 \\ \hline & & & 9 \end{array}$$

चरण 2: पुनः 5 जो 8 से छोटा है।

अर्थात्, $5 < 8$ अन्तर $8 - 5 = 3$ का पूरक लेते हैं

पूरक 9 से 3 को घटाने पर ($9 - 3 = 6$) पर 6 आएगा।

$$
\begin{array}{cccc}
 & & (9) & (10) \\
 & 8 & 5 & 6 \\
- & 3 & 8 & 7 \\
\hline
 & & 6 & 9
\end{array}
$$

चरण 3 8 में से एक कम = 8 – 1 = 7 में से 3 घटाने पर शेष 4 आएगा, जिसे सैकड़े के स्थान पर लिखेंगे ।

$$
\begin{array}{cccc}
 & 8 & 5 & 6 \\
 & 3 & 8 & 7 \\
\hline
- & 4 & 6 & 9
\end{array}
$$

विलोकनम् - सूत्र द्वारा गुणा - (मनोरंजक गुणन विधियाँ)

1. **किसी संख्या का 5 से गुणा -** संख्या के दाहिनी तरफ एक शून्य लगाएँ और उसे 2 से भाग दे या उसका आधा कर दो ।

उदाहरण : हल करें- 42×5

हल : 42 से आगे 1 शून्य लगायें इसे 420 लिखें ।

इसे 2 से भाग दे $= \frac{420}{2} = 210$

या 420 का आधा = 210 अतः , $42 \times 5 = 210$

2. **किसी संख्या का 10 से गुणा -**

$6 \times 10 = 60$, $10 \times 10 = 100$, $78 \times 10 = 780$

3. **किसी संख्या को 100 से गुणा करें -**

$6 \times 100 = 600$, $10 \times 100 = 1000$, $78 \times 100 = 7800$

☞ **10 से गुणा** करने पर इकाई के स्थान पर शून्य आ जाता है एवं मूल संख्या दहाई व दहाई से आगे बढ़ जाती है।

☞ **100 से गुणा** करने पर इकाई व दहाई के स्थान पर शून्य आ जाता है एवं मूल संख्या दायीं ओर आगे बढ़ जाती है।

एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र से गुणा - इस वैदिक सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण का अर्थ **"पूर्व से एक कम द्वारा"** है । दो संख्याओं को गुणा करने की अद्भुत विधि है। लेकिन इसका प्रयोग सीमित है। यह सूत्र निम्नलिखित तीन परिस्थितियों में ही काम करता है।

- जब गुणक में गुण्य के अकों के बराबर 9 हो ।
- जब गुणक में 9 के अङ्क गुण्य से ज्यादा हो ।
- जब गुणक में 9 के अङ्क गुण्य से कम हो ।

आपको गुणक एवं गुण्य का स्मरण होगा -

	12	गुण्य
×	4	गुणक
	48	गुणनफल

आइये, हम उपर्युक्त तीनों स्थिति के सवालों को हल करना सीखते हैं ।

स्थिति 1 - जब गुणक में गुण्य के अङ्कों के बराबर 9 अङ्क हो।

नियम : 1. गुण्य से 1 घटाएँ और परिणाम बायीं ओर लिखें । (बायाँ पक्ष)

2. बायीं ओर के प्राप्त परिणाम को गुणक से घटायें। (दायाँ पक्ष)

उदाहरण : 645 × 999 से गुणा करें।

हल : बायाँ भाग = गुण्य – 1 = 645 – 1 = 644

दायाँ भाग = गुणक – (प्राप्त भागफल) = 999 – 644 = 355

अतः, 645 × 999

बायाँ भाग	दायाँ भाग
644	355

= 644355

स्थिति 2- जब गुणक में 9 अङ्क की संख्या गुण्य से ज्यादा हो ।

नियम - **स्थिति 2** में **स्थिति** 1 जैसी प्रक्रिया अपनाई जाएगी ।

उदाहरण : 458 × 9999 से गुणा करें।

हल : बायाँ भाग = 458 – 1 = 457

दायाँ भाग = 9999 – 457 = 9542

अतः, 458 × 9999 = 4579542

स्थिति 3 - जब गुणक में गुण्य की अपेक्षा 9 के अङ्कों की संख्या कम हो ।

नियम – (1) गुणक में जितने 9 के अङ्क हो उतने शून्य गुण्य के बाद लिखें।

(2) **नियम** 1 में प्राप्त संख्या को मूल गुणक से घटा दें।

उदाहरण : 1584 × 99 का गुणनफल ज्ञात करें।

हल : गुण्य 1584 में 4 अङ्क है, जबकि गुणक में दो 9 हैं ।

(1) यहाँ गुणक 99 में सिर्फ दो 9 है । अतः 1584 के अन्त में दो शून्य मिलाकर इसे 158400 बना दें ।

(2) 158400 से मूल गुण्य 1584 घटा दें ।

				(9)	(9)	(10)
	1	5	8	4	0	0
–			1	5	8	4
	1	5	6	9	1	6
	1	5	6	8	1	6

अतः , 1584 × 99 = 156816

उदाहरण : 45678 को 999 से गुणन करें।

हल : (1) चूंकि तीन 9 है तो तीन शून्य लगाकर लिखें।

4 5 6 7 8 0 0 0

(2) 45678000 में से 45678 को घटा दें

$$\begin{array}{r} 45678000 \\ -\quad 45678 \\ \hline 45632322 \end{array}$$

किसी संख्या में 11 से गुणा -

नियम -(1) 11 से गुणा की जाने वाली संख्या के दोनों तरफ 0 लगा दें ।

(2) दो-दो संख्याओं को जोडते हुए ,दाहिने से बायीं ओर आगे बढ़ते हुए, जोड़ना शुरू करें। हासिल होने पर आगे, अगले अङ्क के योग में जोड दें ।

उदाहरण : 134×11 का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल: उपर्युक्त नियमानुसार :

0 [1 3 4] 0

0 + 1/ 1 + 3 / 3 + 4 / 4 + 0

1 / 4 / 7 / 4

अतः , $134 \times 11 = 1474$

भिन्न –

➢ **जब हर समान हो -**

उदाहरण : अनुगामी भिन्नों $\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{9}{7}, \frac{1}{7}$ को आरोही क्रम में लिखिए।

हल : इनके हर समान हैं एवं अंश अलग-अलग हैं ।इन भिन्नों को हम बढ़ते क्रम में लिख सकते हैं । $\frac{1}{7} < \frac{3}{7} < \frac{5}{7} < \frac{7}{7}$

अर्थात् ,**समान हर वाली भिन्न संख्याओं में जिस भिन्न का अंश बड़ा होगा ,वह भिन्न बड़ी भिन्न होगी** ।

- **जब अंश समान हो**

उदाहरण : भिन्न $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ को आरोही क्रम में लिखिए।

हल : दी गई भिन्न संख्याओं के अंश समान है एवं हर अलग – अलग है। यहाँ हर 5 सबसे बड़ी संख्या है अतः सबसे छोटी भिन्न $\frac{1}{5}$ होगी, एवं सबसे बड़ी भिन्न $\frac{1}{2}$ होगी। आरोही क्रम में लिखने पर -

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{4} > \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$$

अर्थात् , **भिन्नों संख्याओं के अंश परस्पर समान होने पर, जिस भिन्न का हर बड़ा होगा, वह छोटी भिन्न होगी।**

उदाहरण : $\frac{3}{4}$ एवं $\frac{4}{7}$ में बड़ी भिन्न बताइए।

हल :

$$\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 4 & 7 \\ \hline 21 & 16 \end{array}$$

(1) बिना रेखा के भिन्नों के अंश एवं हर लिखिए।

(2) तिर्यक् गुणनफल बने: $3 \times 7 = 21$ तथा $4 \times 4 = 16$

(3) जिस तरफ का गुणनफल बड़ा वह भिन्न बड़ी होगी।

(4) $21 > 16$ अतः, भिन्न $\frac{3}{4} > \frac{4}{7}$

भिन्नों का योग

- **यदि भिन्नों का हर परस्पर समान है तो -**

उदाहरण : $\frac{1}{7} + \frac{2}{7}$ भिन्नों का योग कीजिए।

हल : $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1+2}{7} = \frac{3}{7}$ $\frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हर}}$

अतः, **भिन्नों का योग** = $\frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हर}}$

- **यदि दी गई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं है -**

उदाहरण : $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

$= \frac{1\times3\times5+2\times2\times5+4\times2\times3}{2\times3\times5}$ यहाँ योग में बनने वाले तिर्यक् गुणन –

$= \frac{15+20+24}{30} = \frac{59}{30} = 1\frac{27}{30}$

- **जब दी हुई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हों और उनमें उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हो ।**

उदाहरण : $\frac{1}{4} + \frac{1}{10}$ को हल कीजिए ।

हल : $\frac{1\times10+1\times4}{4\times10} = \frac{10+4}{40} = \frac{14}{40}$ (सरलतम रूप में बनाने के लिए अंश व हर को समान संख्या में भाग देना होगा।)

$= \frac{14\div2}{40\div2} = \frac{7}{20}$ (सरलतम रूप में लिखने पर)

- **मिश्र भिन्नों का योग (सूत्र विलोकनम् एवं तिर्यक् गुणन से) :** मिश्र भिन्नों का योगफल विलोकनम् तथा तिर्यक् गुणन सूत्र के प्रयोग से बड़ी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है ।

$= 1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{3}$ (विलोकनम् सूत्र से मिश्र भिन्न के दो भाग करें ।)

$1\frac{3}{4} = 1+\frac{3}{4}$ तथा $2\frac{1}{3} = 2+\frac{1}{3}$

$= 1+\frac{3}{4}+2+\frac{1}{3}$

$= (1+2)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right.$ का तिर्यक् गुणन से योग।)

$= 3 + \frac{3\times3+1\times4}{4\times3} = 3+\frac{9+4}{12}$

$= 3 + \frac{13}{12} = 3+1\frac{1}{12}$ (विलोकनम् का उपयोग)

$= (3+1)+\frac{1}{12} = 4+\frac{1}{12}$ या $4\frac{1}{12}$

भिन्नों का व्यवकलन : भिन्नों की व्यवकलन सङ्क्रिया भिन्नों की योगफल सङ्क्रिया से मिलती-जुलती है। योग सङ्क्रिया में योग चिह्न (+) एवं व्यवकलन सङ्क्रिया में व्यवकलन चिह्न (–) का उपयोग करेंगे।

- **भिन्नों का व्यवकलन जब भिन्नों का हर परस्पर समान हो।**

उदाहरण : भिन्न $\frac{3}{7} - \frac{1}{7}$ का व्यवकलन कीजिए।

हल : $\frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3-1}{7} = \frac{2}{7}$

- **जब भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हैं और उनमें कोई उभयनिष्ठ गुणनफल नहीं है तो व्यवकलन करना -**

उदाहरण : भिन्न $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$ का व्यवकलन कीजिए।

हल : $\frac{4\times3-5\times2}{5\times3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$

उदाहरण : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{1\times3\times5+1\times2\times5-1\times2\times3}{2\times3\times5}$ (भिन्नों के योगफल की तरह हल)

$= \frac{15+10-6}{30} = \frac{25-6}{30}$ या $= \frac{19}{30}$

- **मिश्र भिन्न का व्यवकलन -** योगफल सङ्क्रिया के समान सूत्र विलोकनम् और तिर्यक् गुणन के प्रयोग से मिश्र भिन्नों का व्यवकलन भी ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण : $4\frac{3}{4} - 3\frac{2}{5}$ हल कीजिए।

हल : $\left(4 + \frac{3}{4}\right) - \left(3 + \frac{2}{5}\right)$

$= (4-3) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right)$

$= 1 + \frac{3\times5-4\times2}{4\times5} = 1\frac{15-8}{20} = 1\frac{7}{20}$

भिन्न संख्याओं का गुणन : दो भिन्नों का गुणन सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। इनमें दोनों भिन्नों के अंशों का गुणनफल को अंश के स्थान एवं हरों का गुणनफल को हर के स्थान पर लिखते हैं ।

उदाहरण : $\frac{1}{2}$ एवं $\frac{3}{7}$ का गुणफल ज्ञात कीजिए -

हल : $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{1\times3}{2\times7} = \frac{3}{14}$

- **दो मिश्र भिन्नों का गुणन ('एकाधिकेन पूर्वेण' सूत्र से)**

दो मिश्र भिन्नों के चरम अङ्कों का योगफल यदि 1 हो एवं आधार तथा शेष निखिल अङ्क समान हों, तो सामान्य संख्याओं को सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा इनका गुणनफल दो भागों में लिखा जा सकता है।

उदाहरण : $7\frac{1}{4} \times 7\frac{3}{4}$ को हल कीजिए।

हल : (1) चरम अङ्क $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ का योगफल $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

(2) शेष निखिल अङ्क परस्पर समान $= 7$ है।

(3) बायाँ भाग $=$ शेष निखिल अङ्क $\times$ उसका एकाधिक

$7 \times (7 + 1)$

(4) दायाँ भाग $=$ चरम अङ्कों का गुणा $= \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

अर्थात् $= 7 \times (7 + 1) / \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

$= 7 \times (7 + 1) + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

$= 7 \times 8 + \frac{3}{16}$

$= 56 + \frac{3}{16} = 56\frac{3}{16}$

उदाहरण : भिन्न $15\frac{4}{7} \times 15\frac{3}{7}$ का गुणा कीजिए।

हल : $15\frac{4}{7} \times 15\frac{3}{7}$

$= 15 \times (15 + 1)/\frac{4}{7} \times \frac{3}{7}$

$= 15 \times 16/\frac{12}{49}$

$= 240\frac{12}{49}$

- **दो भिन्नों का गुणन ('विलोकनम्' सूत्र से)**

उदाहरण : भिन्न $5\frac{1}{2} \times 6$ का गुणन वैदिक विधि से कीजिए।

हल : $\left(5 + \frac{1}{2}\right) \times 6$ (विलोकनम् सूत्र)

$= 5 \times 6 + \frac{1}{2} \times 6$ (कोष्ठक का हल)

$= 30 + 3$ (6 का आधा = 3)

$= 33$

उदाहरण : मिश्र भिन्न $7\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2}$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $\left(7 + \frac{1}{2}\right) \times \left(8 + \frac{1}{2}\right)$ (विलोकनम् सूत्र)

$= 7 \times 8 + 7 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= 56 + 3\frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{4}$

$= 56 + 3 + 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= 63\ \frac{6}{8}$ या $63\ \frac{3}{4}$ $\left(\frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}\right)$

भाग - `निखिलं नवतश्चरमं दशतः' सूत्र (जब भाजक आधार से कम हो)

कार्य प्रणाली -

1. भाजक का निकटतम आधार (10 की घात में) लीजिए और इसके पूरक को मूल भाजक के नीचे भाजक स्तम्भ में लिखिए। **पूरक = आधार – भाजक**। "निखिलं नवतश्चरमं दशतः" विधि की सहायता से पूरक आसानी से प्राप्त किया जा सकता है, जैसा कि व्यवकलन(अन्तर)अध्याय में समझाया गया है। भाजक का पूरक इसके नीचे लिखिए।

2. किसी भाज्य के सबसे दायें अङ्क या अङ्क समूह को भाजक के अङ्कों की संख्या के बराबर टुकड़ों में तिर्यक् रेखा खींचकर अलग कीजिए । यह समूह शेषफल समूह कहलाता है और बायें तरफ का समूह भागफल समूह कहलाता है।
3. शेषफल के स्तम्भ में रखी जाने वाली अङ्कों की यह संख्या आधार के शून्यों की संख्या के बराबर होगी।
4. भाजक के पहले अङ्क को दूसरे स्तम्भ में ले जाइए। इससे आपको भागफल का पहला अङ्क मिल जाएगा । भागफल के अङ्क को पूरक से गुणा कीजिए, और इसे भाज्य के स्तम्भ में भाज्य के पहले अङ्क के आगे रखिए।
5. भागफल का दूसरा अङ्क प्राप्त करने के लिए दूसरे स्तम्भ के अङ्कों का योग सामान्य रूप से लिखिए।
6. यह प्रक्रिया तब तक करते रहें, जब तक कि आपको शेषफल स्तम्भ में संख्या न मिलें। अगर शेषफल विभाजक से बड़ा है, तो यही प्रक्रिया शेषफल समूह में करते रहें जब तक कि शेषफल स्तम्भ में अङ्क मूल भाजक से छोटा न हो जाए।

उदाहरण : 10025 को 88 से भाग दीजिए -

हल : आधार = 100

पूरक = 100 – 8 8 = 1 2

	स्तम्भ 1	**स्तम्भ 2**	**स्तम्भ 3** (***R***)
भाजक :	8 8	1 0 0	2 5
पूरक :	1 2	1 2	– –
		1	2 –
			3 6
		1 1 3	8 1

इस प्रकार, भागफल = 113 एवं शेषफल = 81

सङ्केत:

1. यहाँ भाजक = 88 , निकटतम आधार (10 का गुणज) = 100

   पूरक = आधार – भाजक

   = 100 – 88 = 12

2. अङ्कों को स्तम्भों में ऊपर दिखाए अनुसार, भागफल और शेषफल को अलग करते हुए व्यवस्थित कीजिए। चूंकि, आधार में दो शून्य हैं, इसलिए शेषफल स्तम्भ में भाज्य के सबसे दायें ओर के दो अङ्क होंगे।

3. **स्तम्भ 2** में 1 को नीचे ले जाइए (भाज्य का पहला अङ्क)। यही भागफल का पहला अङ्क होगा।

4. भागफल के पहले अङ्क को पूरक से गुणा कीजिए और इसे भाज्य स्तम्भ में, भाज्य के पहले अङ्क के दायीं ओर में रखिए: $12 \times 1 = 12$ को 0 के नीचे रखा गया है।

	स्तम्भ 1	**स्तम्भ 2 (Q)**	**स्तम्भ 3 (R)**
भाजक :	8 8	1 0 0	2 5
पूरक :	1 2	1 2	- -
		1	2 -
			3 6
		1 1	

5. गोलाकार के अङ्कों के योग को नीचे ले जाइए। इससे आपको भागफल का दूसरा अङ्क मिल जाएगा, 0 + 1 = 1

6. भागफल के दूसरे अङ्क को पूरक से गुणा कीजिए और इसे भाज्य स्तम्भ में भाज्य के दूसरे अङ्क के दायीं ओर में रखिए। $12 \times 1 = 12$ को दूसरे शून्य के नीचे रखा गया है।

	स्तम्भ 1	स्तम्भ 2 (Q)	स्तम्भ 3 (R)
भाजक :	8 8	1 0 0	2 5
पूरक :	1 2	1 2	- -
		1	2 -
		1 1 3	

7. गोलाकार के दूसरे अङ्क को नीचे ले जाइए; इससे आपको भागफल का तीसरा अङ्क मिलेगा। भागफल का तीसरा अङ्क $0 + 2 + 1 = 3$

8. पूरक 12 को तीसरे भागफल (3) से गुणा कीजिए और इसे शेषफल के चौथे अङ्क के दायीं ओर में लिखिए। $12 \times 3 = 36$ को **स्तम्भ 3** में 2 के नीचे रखा गया है।

	स्तम्भ 1	स्तम्भ 2 (Q)	स्तम्भ 3 (R)
भाजक :	8 8	1 0 0	2 5
पूरक :	1 2	1 2	- -
		1	2 -
			3 6
		1 1 3	8 1

9. शेषफल प्राप्त करने के लिए **स्तम्भ** 3 के अङ्कों को जोड़िए। उपर्युक्त प्रक्रिया दोहराते रहें , जब तक कि इस तरह से शेषफल स्तम्भ में मिलने वाले अङ्क मूल भाजक से कम न हो जाएँ।

यहाँ **स्तम्भ** 3 के अङ्कों का योग = 81 और 81 < 88 (भाजक),

इस प्रकार , भागफल = 113 और शेषफल = 81

अभ्यास प्रश्नावली - 3

1. पूरणापूरणाभ्याम् तथा सङ्कलन-व्यवकलन सूत्र का उपयोग करते हुए, योगफल ज्ञात कीजिए।

(1) $82 + 18 + 96 + 24 + 17 + 13$

(2) $324 + 126 + 249 + 311$

2. निखिलं नवतः चरमं दशतः सूत्र से व्यवकलन(अन्तर) ज्ञात करें -

(1) $\begin{array}{r} 70000 \\ -\ 1346 \\ \hline \end{array}$ (2) $\begin{array}{r} 5434 \\ -2176 \\ \hline \end{array}$

3. विलोकनम् सूत्र से गुणन करें -

(1) 78×10 (2) 35×100 (3) 432×100

4. एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र से गुणा कीजिए -

(1) 81×99 (2) 78×99 (4) 34×9999

(5) 134×9 (6) 345×99

5. गुणनफल ज्ञात करें –

(1) 345×11 (2) 341×11 (3) 345×11

1. निम्न भिन्नों की तुलना कर चिह्न (> , = एवं <) लगाइए –

(i) $\frac{3}{5}$ ☐ $\frac{4}{9}$ (ii) $\frac{3}{5}$ ☐ $\frac{6}{5}$ (ii) $\frac{4}{7}$ ☐ $\frac{5}{3}$

2. भिन्न को आरोही क्रम में लिखिए -

(i) $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$

3. भिन्न को अवरोही क्रम में लिखिए -

(i) $\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$

4. योगफल ज्ञात कीजिए (सूत्र विलोकनम् एवं तिर्यक् गुणन से) -

(i) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{7}{15} + \frac{3}{15}$

5. व्यवकलन (अन्तर) कीजिए (सूत्र - विलोकनम् एवं एक तिर्यक् गुणन से)

(i) $\frac{9}{10} - \frac{3}{10}$ (ii) $\frac{7}{5} - \frac{4}{5}$ (iii) $3\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}$

6. एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र द्वारा गुणा कीजिए -

(i) $\frac{1}{8} \times \frac{3}{5}$ (ii) $5\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2}$ (iii) $3\frac{2}{4} \times 3\frac{1}{4}$

7. भागफल ज्ञात करें -

(i) $11011 \div 89$ (ii) $10025 \div 88$

अध्याय 4

आंकड़ों का प्रबन्धन

➢ एक कक्षा में 15 विद्यार्थी हैं, जिनका 20 अङ्कों का गणित विषय की परीक्षा ली जाती है। परीक्षा में विद्यार्थियों को प्राप्त अङ्क निम्नाङ्कित हैं -

12, 10, 11, 12, 8, 9, 12, 8, 8, 7, 9, 7, 8, 10, 11

ये सभी आंकड़े हैं, आंकड़े संख्याओं के वे संग्रह हैं, जो कुछ सूचनाएँ देने के लिए एकत्रित किए जाते हैं।

आंकड़ों को व्यवस्थित करना - विद्यालय में वार्षिकोत्सव पर विद्यार्थियों को उनके पसन्द की मिठाई, वितरित करनी है। इसलिए पसंदीदा मिठाई के बारे में जानकारी ली गई। लड्डू को L, काजूकतली को V और रसगुल्ले को R से दिखाया गया तो वह इस प्रकार है।

R, R, L, V, R, R, V, L, R, L, R, V, L, R, V, V, V, V, V

उपर्युक्त आंकड़े को राधाकृष्ण ने निम्न प्रकार से बताया -

L - 4, V - 8, R - 7

अविनाश का प्रारूप इस प्रकार था -

मिठाई का नाम	पसन्द करने वालों की संख्या
रसगुल्ला R	✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓
काजू कतली V	✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓
लड्डू L	✓ ✓ ✓ ✓

विकास का प्रारूप निम्न प्रकार से है। -

मिठाई का नाम	मिलान चिह्न	पसन्द करने वालों की संख्या
रसगुल्ला R	~~IIII~~ I I	7
काजूकतली V	~~IIII~~ I I I	8
लड्डू L	I I I I	4

यहाँ हमने तीन रूपों में आंकड़े को देखा जिसमें विकास के द्वारा तय किया गया रूप ठीक है ,क्योंकि विकास ने गणना चिह्नों को पाँच के समूह के रूप में लिखा है, जो कि गिनने में भी आसान है ।

उदाहरण : अमन ने पासा लेकर 20 बार उछाला और नीचे दिखाए अनुसार आंकड़े लिखें –

1, 3, 4, 5, 6, 6, 4, 3, 5, 2, 6, 6, 5, 5, 1, 2, 3, 3, 6, 4

अमन निम्नलिखित सूचना प्राप्त करना चाहता है ।

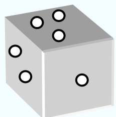
1. पासे की उछाल पर सबसे अधिक बार आने वाला अङ्क
2. पासे की उछाल पर सबसे कम बार आने वाला अङ्क
3. पासे की उछाल पर सम अङ्क कितनी बार आता है ।

अमन ने मिलान-चिह्न का प्रयोग करते हुए सारणी तैयार की -

पासे के अङ्क	मिलान चिह्न	बारम्बारता (संख्या)
1	I I	2
2	I I	2
3	I I I I	4
4	I I I	3
5	I I I I	4
6	~~IIII~~	5

अब पूछे गये प्रश्नों के उत्तर आसानी से दिये जा सकते हैं ।

(**पासा (dice)** - साँप सीढ़ी का खेल खेलते समय हम इसका प्रयोग करते हैं ।

पासा - 

प्रतिनिधि मान - आप 'औसत' (average) शब्द से अवश्य परिचित होंगे। आपने दैनिक जीवन में औसत शब्द निम्न कथनों में सुने या पढ़े होंगे ।

जैसे: 1. क्रिकेट मैच में प्रति ओवर औसत रन-रेट 4 का है ।

2. राहुल औसतन अपने वेद का अध्ययन 4 घण्टे करता है ।

➢ **एक प्रतिनिधि मान या केन्द्रीय प्रवृत्ति मान को अङ्कगणित माध्य या समान्तर माध्य (Arthmetic mean)** कहते हैं।

अङ्क गणित माध्य या समान्तर माध्य - आंकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांशतः प्रयोग किए जाना वाला औसत, अङ्कगणित माध्य है। जिसे हम संक्षेप में **माध्य** कहते हैं । औसत या प्रतिनिधिमान या अङ्कगणित माध्य या समान्तर माध्य को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है -

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

उदाहरण: अङ्कित चार क्रमागत दिनों में क्रमशः 2 घण्टे, 5 घण्टे, 6 घण्टे और 3 घण्टे अध्ययन करता है। उसके प्रतिदिन पढ़ने का औसत समय क्या है ?

हल : अङ्कित के पढ़ने का औसत समय होगा -

$$\text{माध्य या औसत} = \frac{\text{अध्ययन में लगाया कुल समय}}{\text{दिनों की संख्या जिसमें अध्ययन किया}}$$

$$= \frac{(2+5+6+3)\ \text{घण्टे}}{4}$$

$$= \frac{16}{4}\ \text{घण्टे} = 4\ \text{घण्टे}$$

अत: , हम कह सकते हैं कि वह प्रतिदिन 4 घण्टे अध्ययन करता है ।

➢ **चर्चा कीजिए -**

1. क्या औसत या माध्य आंकड़ों में सबसे बड़ा है ?
2. क्या यह प्रत्येक आंकड़े से छोटा है ?

आप पाएंगे कि माध्य सबसे बड़े एवं छोटे आंकड़ों के बीच में स्थित होता है ।

उदाहरण : 1 और 3 का समान्तर माध्य ज्ञात करें ?

हल : समान्तर माध्य $= \frac{\text{कुल आंकड़े का योग}}{\text{कुल आंकड़े की संख्या}}$

$$= \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

अतः , 1 एवं 3 का समान्तर माध्य 2 होगा ।

प्रसार या परिसर - सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के अन्तर से हमें प्रेक्षणों के प्रसार का अनुमान लग जाता है।

परिसर = बड़े प्रेक्षण – छोटे प्रेक्षण

उदाहरण : एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 6 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए -

60, 43, 57, 15, 25, 40

1. खिलाड़ी ने सबसे अधिक रनों की पारी तथा सबसे कम रन की खेली गई पारी में कितने रन बनाए ।
2. खिलाड़ी के द्वारा खेली गई पारियों के रनों का परिसर क्या है ?
3. खिलाड़ी ने औसतन कितने रनों की पारी खेली या रनों का माध्य ज्ञात करें।

हल :1. रनों को आरोही क्रम (बढ़ते क्रम) में व्यवस्थित करने पर, हमें ज्ञात होता है।

15, 25, 40, 43, 57, 60

हम उपर्युक्त आंकड़ों को देखकर आसानी से कह सकते हैं कि सबसे अधिक रनों की पारी में 60 रन एवं सबसे कम रनों में 15 रनों की पारी खिलाड़ी द्वारा खेली गई।

2. **रनों का परिसर = (सबसे अधिक रन) – (सबसे कम रन)**

= 60 – 15 = 45

3. खिलाड़ी द्वारा प्रत्येक पारियों में बनाए रनों का औसत -

$$\text{औसत} = \frac{\text{कुल पारियों में बनाये रनों का योग}}{\text{कुल खेली गयी पारियों की संख्या}}$$

$$= \frac{15 + 25 + 40 + 43 + 57 + 60}{6}$$

$$= \frac{240}{6} = 40$$

➢ **महत्त्वपूर्ण बिन्दु :** 1. दो संख्याओं का माध्य सदैव उनके बीच में स्थित होता है ।

2. माध्य सबसे बड़े तथा सबसे छोटे प्रेक्षणों (आंकड़ों) के बीच में स्थित होता है ।

बहुलक - आंकड़ों के समूह में सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक कहते हैं।

उदाहरण : निम्नाङ्कित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए -

4, 5, 5, 2, 4, 7, 4, 4, 4, 3,

हल : समान मान वाली संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर -

2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 7

उपर्युक्त प्रक्षेणों के निरीक्षण से स्पष्ट है कि अङ्क 4 सबसे अधिक बार आया है । अतः बहुलक 4 होगा ।

बड़े व अवर्गीकृत आंकड़ों का प्रबन्धन - यदि आंकड़ों (प्रेक्षणों) की संख्या अधिक हो तो उसको आरोही क्रम में लिखकर फिर गिनना इतना आसान नहीं होता है। ऐसी स्थिति में हम आंकड़ों को मिलान चिह्न की सहायता से सारणीबद्ध करते हैं।

उदाहरण : वेद भूषण द्वितीय वर्ष के 30 वेद पाठियों के अपने-अपने परिवार के सदस्यों की संख्या को यहाँ एक साथ लिखा। यह संख्या निम्नाङ्कित है।

5, 5, 6, 4, 4, 3, 5, 4, 4, 7, 6, 5, 4, 3, 4,

5, 4, 6, 7, 4, 4, 4, 6, 5, 3, 7, 4, 5, 3, 4

उपर्युक्त आंकड़ों का बहुलक ज्ञात करें।

हल : आंकड़ों को सारणी बद्ध करने पर-

परिवार में सदस्यों की संख्या	मिलान चिह्न	वेद पाठियों की संख्या (बारम्बारता)
3	||||	4
4	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
5	~~||||~~ ||	7
6	||||	4
7	|||	3
	योग	**30**

उपर्युक्त सारणी को देखकर हम आसानी से बता सकते हैं कि इन आंकड़ों का बहुलक 4 है,क्योंकि सबसे अधिक परिवार में सदस्यों की संख्या 4 है।(सबसे अधिक बारम्बारता 12 है जिसके पद का मान 4 है।)

➢ **चर्चा करें -** क्या संख्याओं के एक समूह में दो बहुलक हो सकते हैं ?

माध्यक (माध्यिका) - यदि आंकड़ों को आरोही क्रम या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाए तो मध्य में आने वाले पद का मान माध्यक (माध्यिका) कहलाता है।

उदाहरण : विषम पद होने पर निम्नलिखित आंकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए -

24, 12, 27, 38, 40, 13, 16

हल : आंकडों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त होता है ।

12, 13, 16, 24, 27, 38, 40 (यहाँ, n = 7 (विषम संख्या)

माध्यिका = $\frac{n+1}{2}$ **वें पद का मान**

= $\frac{7+1}{2}$ वें पद का मान = 4 (चौथे) पद का मान

उपर्युक्त आंकडों को व्यवस्थित कर 4 (चौथे) पद का 24 है,अत: माध्यका =24 है।

उदाहरण : दिये गये आंकडे सम पद होने पर एक चर के मान 78, 56, 22, 34, 45, 52, 39, 68, 69, 84 हैं । इनकी माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

हल : आरोही क्रम में लिखने पर 22, 34, 39, 45, 52, 56, 68,69, 78, 84

यहाँ आंकड़ों की संख्या n = 10 (सम संख्या)

माध्यिका $= \frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\text{वें पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वें पद का मान}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{10}{2}\text{वें पद का मान} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वें पद का मान}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[5\text{वें पद का मान} + (5+1)\text{वें पद का मान}\right]$

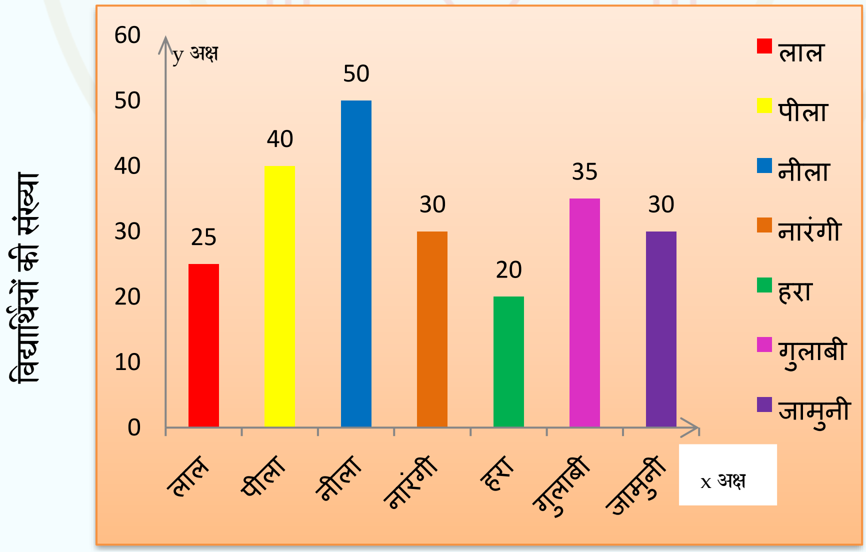
$= \frac{1}{2}\left[5\text{वें पद का मान} + 6\text{वें पद का मान}\right]$

$= \frac{1}{2}[52+56] \quad = \frac{1}{2}[108] \quad = 54$

दण्ड आलेख - आंकड़ों को निरूपित करने की विधि है - दण्ड आलेख। दण्ड आलेख समान लम्बाई ,चौड़ाई दण्ड है। दो दण्डों के बीच की दूरी भी समान होती है। इस प्रकार खींचे गए प्रत्येक दण्ड की लम्बाई दी गई संख्या को दिखाती है। ये दण्ड क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर खींचे जा सकते हैं। आंकड़ों को प्रस्तुत करने का यह निरूपण **दण्ड आलेख या दण्ड आरेख** कहलाता है।

दण्ड आलेख पढ़ना - एक वेद पाठशाला में 230 विद्यार्थियों से उनके मनपसन्द रंग का नाम बताने के लिए कहा गया की पाठशाला में कौन-सा रंग करवाया जाए ? इसके लिए 'x' अक्ष पर रंगों के नाम तथा 'y' अक्ष पर रंग पसन्द करने वाले विद्यार्थी की संख्या दर्शाई गई है । साथ ही 1 इकाई बराबर 10 विद्यार्थी लेते हैं ।

मनपसन्द रंग	लाल	पिला	नीला	नारंगी	हरा	गुलाबी	जामुनी
विद्यार्थियों की संख्या	25	40	50	30	20	35	30



मनपसन्द रंग

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए -

1. यह कौन-सा दण्ड आलेख है ? (क्षैतिज/ऊर्ध्वाधर)
2. वह कौन-सा रंग है ,जिसे सबसे कम पसन्द किया गया ?
3. वह कौन-सा रंग है, जिससे सबसे अधिक विद्यार्थियों ने पसन्द किया ?
   या प्राप्त आंकड़ों से बहुलक ज्ञात करने पर कौन-सा रंग प्राप्त होगा ?
4. सबसे अधिक रंग पसन्द करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?
5. सबसे कम रंग पसन्द करने वाले विद्यार्थियों की संख्या कितनी है ?
6. वह कौन-कौन से रंग हैं,जिन्हें समान विद्यार्थियों द्वारा पसन्द किया गया?

हल : 1. हम देख सकते हैं यह दण्ड आलेख ऊर्ध्वाधर दण्डालेख है।

2. इस दण्ड आलेख के अध्ययन करने पर सबसे कम पसन्द किया गया रंग हरा है।
3. विद्यार्थियों द्वारा सबसे अधिक पसन्द किया गया रंग नीला है।
   या सबसे अधिक बारम्बारता (50) नीले रंग की है।
   अतः बहुलक नीला रंग है।
4. सबसे अधिक रंग पसन्द करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 50 है।
5. सबसे कम रंग पसन्द करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 20 है।
6. जामुनी एवं नारंगी रंग ऐसे हैं,जिन्हें समान विद्यार्थियों द्वारा पसन्द किया गया है।

विविध प्रश्नावली उदाहरण :

उदाहरण : आंकड़ों का परिसर ज्ञात करें - 1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 6, 7

हल : परिसर = सबसे बड़े आंकड़ा – सबसे छोटा आंकड़ा

$= 10 - 1$

$= 9$

अतः उपर्युक्त आंकड़े का परिसर 9 है।

उदाहरण : निम्नलिखित आंकड़ों का माध्य, परिसर एवं बहुलक ज्ञात करें ।

3, 4, 5, 10, 3, 5

हल : 1. माध्य $= \frac{\text{सभी आंकड़ों का योग}}{\text{आंकड़ों की संख्या}}$

$= \frac{3+4+5+10+3+5}{6}$

$= \frac{30}{6} \quad = 5$

2. परिसर = सबसे बड़ा आंकड़ा – सबसे छोटा आंकड़ा

$= 10 - 3$

$= 7$

3. बहुलक ज्ञात करने के लिए -

सर्वप्रथम आंकड़ों को आरोही क्रम में लिखने पर -

3, 3, 4, 5, 5, 10

अतः हम देखकर बता सकते हैं कि बहुलक 3 एवं 5 होगा ,क्योंकि दोनों की बारम्बारता समान है।

अभ्यास प्रश्नावली - 4

1. संख्या 1, 3 व 5 का माध्य (औसत) ज्ञात कीजिए।
2. प्रथम पाँच सम प्राकृत संख्या 2, 4, 6, 8, 10 का समान्तर माध्य ज्ञात करें।
3. प्रथम पाँच विषम प्राकृत संख्याओं का औसत एवं परिसर ज्ञात कीजिए।
4. संख्याएँ 1, 6, 3, 5, 4, 6, 7, 8, 9 तथा 1 का औसत एवं परिसर ज्ञात कीजिए।
5. पुस्तकालय में 6 पुस्तकों का मूल्य 46, 40, 50, 58, 62 तथा 90 रुपये है। पुस्तकों के मूल्य का परिसर ज्ञात कीजिए।
6. गणित के 10 विद्यार्थियों द्वारा (20 में से) परीक्षा में प्राप्त अङ्क निम्नलिखित हैं।

   15, 16, 17, 17, 18, 17, 19, 17, 20, 17
7. इन आंकड़ों का बहुलक एवं माध्यक (माध्यिका) ज्ञात कीजिए।
8. निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक एवं माध्यक (माध्यिका) ज्ञात करें।

   10, 12, 13, 13, 12, 13, 13, 14, 15, 13
9. निम्न आंकड़ों का बहुलक ज्ञात करें।

   7, 6, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 3
10. वेद भूषण प्रथम से पञ्चम वर्ष के विद्यार्थियों की संख्याएँ नीचे दी गई हैं। इन आंकड़ों का दण्ड आलेख द्वारा निरूपण कीजिए -

वेद	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ	पञ्चम
विद्यार्थियों की संख्या	20	15	30	10	15

अध्याय 5

सरल समीकरण

चर राशि - ऐसी राशि जिसका मान परिवर्तित होता रहता है। वह चर राशि (अज्ञात संख्या) कहलाती है।

यावत्तावत्कालको नीलकोऽन्यो वर्णः पीतो लोहितश्चैतदाद्याः।

अव्यक्तानां कल्पिता मानसंज्ञा-स्तत्संख्यानं कर्तुमाचार्यवर्यैः।

(बीजगणितम् ,अथाव्यक्त-षड्विधं निरूपयति,7)

अर्थात् अव्यक्त (अज्ञातमान) या चर राशियों की गणना करने के लिए उन की यावत्-तावत्, कालक, नीलक, पीतक और लोहित इत्यादि संज्ञाएँ की है, जिससे सभी अव्यक्त राशियों का पृथ्क-पृथ्क परिज्ञान हो। अज्ञात राशि या अज्ञात संख्या या चर राशि को एक अक्षर x से व्यक्त करें । आप x के स्थान पर अन्य अक्षर जैसे $a, b, c, \dots \dots \dots x, y, z$ इत्यादि में से किसी का भी प्रयोग कर सकते हैं ।

जैसे - ऐसी संख्या बतायें जिसमें 5 जोड़ने पर 8 प्राप्त होता है ।तब हम देखते हैं ।

अज्ञात राशि + 5 = 8

हम अज्ञात राशि को किसी भी अक्षर $a, b, c, \dots \dots \dots x, y, z$ से दर्शाया जा सकता है। यदि हम y से दर्शाना चाहे तब हम पायेंगे ।

$$y + 5 = 8$$

अचर राशि : ऐसी राशि, जिसका मान बदलता नहीं है। **अचर राशि** कहलाती है। अचर राशियों को संख्यात्मक मान 0, 1, 2 .... 9 से दर्शाया जाता है ।

उदाहरण : $2x$ में 2 एक अचर राशि है तथा x चर राशि है।

$2x$ को हम इस निम्नलिखित रूप में भी लिख सकते हैं। $= 2 \times x$

यहाँ, x का मान 1 रखने पर $= 2 \times 1 = 2$ प्राप्त होगा।

x का मान 2 रखने पर $= 2 \times 2 = 4$ प्राप्त होगा।

x का मान 3 रखने पर $= 2 \times 3 = 6$ प्राप्त होगा।

उपर्युक्त से हम कह सकते हैं कि x चर राशि है जिसका मान बदलता रहता है, जो भी मान x का बदलता हैं तो उसका गुणा हमेशा 2 के साथ किया जाता है। अतः यहाँ 2 अचर राशि है।

नोट : जब चर एवं अचर राशियों के बीच कोई चिह्न (+ या –) नहीं होता है, तब उनके मध्य गुणा (×) का चिह्न होता है।

❖ **करो और सीखो -**

निम्नाङ्कित में चर एवं अचर राशि को अलग कीजिए -

$x, 2, 3, y, P, Q, 1, 8, 4, 5, R, S, t, V, 1$

चर राशि = ...

अचर राशि = ...

समीकरण क्या है ?

- समीकरण में, समता, या बराबर या समिका ($equality$) का चिह्न सदैव होता है। बराबर (=) के चिह्न समीकरण को दो पक्षों में बराबर बांटता है।
- समीकरण में बराबर के चिह्न के बायीं ओर के पक्ष को बायाँ पक्ष ($L.H.S.$) तथा बराबर चिह्न के दायीं ओर के पक्ष को दायाँ पक्ष ($R.H.S.$) होता है।

उदाहरण : $\underbrace{8x + 2}_{\substack{\text{बायाँ पक्ष}\\ L.H.S.}} \; = \; \underbrace{4x + 5}_{\substack{\text{दायाँ पक्ष}\\ R.H.S.}}$

समता चिह्न

- दूसरे शब्दों में - एक समीकरण चर पर एक प्रतिबन्ध होता है, जिसमें दोनों पक्षों के व्यंजकों का मान बराबर होना चाहिए ।

ध्यान रखें : सरल समीकरण के दोनों व्यंजकों में से कम से कम एक में चर होना चाहिए ।

सोचिए - हम समीकरण और व्यंजक को कैसे पहचान सकते हैं ?

कथनों को समीकरण का रूप लिखना -

उदाहरण : किसी संख्या में 4 जोड़ने पर 20 प्राप्त होता है ?

हल : मान लीजिए वह अज्ञात संख्या x है। x और 4 को जोड़ने पर $x + 4$ है । प्रश्नानुसार योग 20 है ।

अतः, वाञ्छित समीकरण $x + 4 = 20$ है ।

उदाहरण : यदि किसी संख्या के 6 गुणा में से आप 5 घटायें तो 7 प्राप्त होता है ।

हल : अब मान लें कि यह संख्या y है। y को 6 गुणा करने पर $6y$ प्राप्त होता है ।

$6y$ में से 5 घटाने पर $(6y - 5)$ प्राप्त होगा यह परिणाम 7 है ।

अतः, वाञ्छित समीकरण $6y - 5 = 7$ है।

उदाहरण : P का एक चौथाई में 7 जोड़ने पर 8 प्राप्त होता है ।

हल : P का एक चौथाई $= \frac{P}{4}$ है ।

उपर्युक्त के प्रश्नानुसार P के एक चौथाई $\left(\frac{P}{4}\right)$ में 7 जोड़ने पर $\left(\frac{P}{4}+7\right)$ है ।

यह 8 के बराबर है ।अतः, वाञ्छित समीकरण $\frac{P}{4}+7=8$ है ।

समीकरणों से कथन के रूप में बदलिए -

(1) $x-4=5$ (2) $5p=25$

(3) $3x+7=11$ (4) $\frac{m}{5}=4$

हल : 1. x में से 4 घटाने पर 5 प्राप्त है।

2. एक संख्या p का पाँच गुणा 25 है।

3. किसी संख्या x का तीन गुणा में 7 जोड़ने पर 11 प्राप्त होता है।

4. किसी संख्या m के $\frac{1}{5}$ वें भाग करने पर 4 प्राप्त होता है।

एक समीकरण को हल करना -

एक समीकरण पर तब तक कोई प्रभाव नहीं होता जब तक कि-

1. समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या को जोड़ा या घटाया जाए।
2. समीकरण के दोनों पक्षों में समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग किया जाए।

उदाहरण : समीकरण $x-3=10$ को हल कीजिए ।

हल : दिया है : $x-3=10$

बायाँ पक्ष $=x-3$ तथा दायाँ पक्ष $=10$

(समीकरण के दोनों पक्षों में 3 को जोड़ने पर)

$$x-3+3=10+3$$
$$x=13$$

अतः, समीकरण का हल $x=13$ है।

उदाहरण : हल कीजिए : $3P = 15$

हल : $3P = 15$

अब दोनों पक्षों में 3 से भाग देने पर

$$\frac{3P}{3} = \frac{15}{3}$$

अतः, $P = 5$ जो इस समीकरण का हल है।

स्थापन विधि द्वारा समीकरण का हल :

आइये , **स्थापन विधि** से चर राशि का मान ज्ञात करना सीखते हैं। इस विधि में एक पक्ष चर और दूसरे पक्ष में संख्या लेते हैं।

- यदि बायें पक्ष की किसी संख्या को दायें पक्ष तथा दायें पक्ष की किसी संख्या को बायें पक्ष में ले जाना चाहते हैं तो चिह्न परिवर्तित हो जाते हैं।

बायाँ पक्ष	:	दायाँ पक्ष
$+$		$-$
$-$		$+$
$\times$		$\div$
$\div$		$\times$

उदाहरण : x का मान ज्ञात करें -

$$x - 12 = 18$$

हल : बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

$$x - 12 = 18$$

$$x = 18 + 12$$

(12 को दायें पक्ष में स्थापन करने पर चिह्न परिवर्तन)

$x = 30$

अतः x का मान 30 है।

उदाहरण : $3x + 1 = 13$

हल : बायाँ पक्ष $= 3x + 1$

दायाँ पक्ष $= 13$

$3x + 1 = 13$ { 1 को बायें पक्ष से दायें पक्ष की ओर ले जाने पर }

$3x = 13 - 1$ { चिह्न परिवर्तन }

$3x = 12$

दोनों पक्षों में 3 से भाग देने पर

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

अतः x का मान 4 है।

अभ्यास प्रश्नावली - 5

1. चर राशि एवं अचर राशि की परिभाषा उदाहरण सहित दीजिए।

2. निम्नलिखित कथनों से समीकरणों के रूप में लिखिए -

   (1) x और 4 का योग 6 है।

   (2) यदि किसी संख्या में 12 घटाएँ तो 7 प्राप्त होगा।

   (3) संख्या p को 5 से भाग देने पर 8 प्राप्त होता है।

3. निम्नलिखित समीकरणों को सामान्य कथनों के रूप में बदलिए -

   (1) $x - 4 = 12$ (2) $3p = 18$ (3) $3x + 4 = 1$

4. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए -

   (1) $10m = 100$ (2) $3x = 12$ (3) $2p + 6 = 18$

अध्याय 6

रेखा एवं कोण

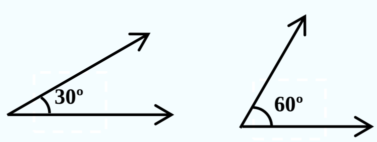
➢ एक रेखाखण्ड के दो अन्त बिन्दु होते हैं। यदि हम इन दो अन्त बिन्दुओं को अपनी-अपनी दिशाओं में अपरिमित रूप में बढ़ाते हैं तो हमें एक **रेखा** प्राप्त होती है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि एक रेखा का कोई अन्त बिन्दु नहीं होता है। आपको याद होगा कि किरण का एक अन्त (प्रारम्भिक बिन्दु) होता है। उदाहरण नीचे दी हुई आकृतियों को देखिए –

किरण		$\overrightarrow{OP}$
रेखाखण्ड		$\overline{AB}$
रेखा		$\overleftrightarrow{MN}$

कोण – जब दो किरण एक बिन्दु से प्रारम्भ होती है तो उनके मध्य **कोण** बनता है।

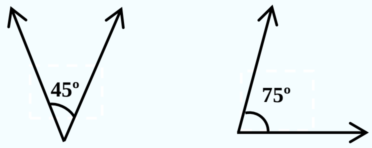
➢ न्यूनकोण (0° से बड़े तथा 90° से छोटे कोण), समकोण (90° का कोण), अधिक कोण (90° से बड़े कोण तथा 180° से छोटे कोण) तथा ऋजु कोण (180°) के रूप में कोणों का वर्गीकरण किया जाता है ।

पूरक कोण – जब दो कोणों के मापों का योग 90° होता है, तो ये कोण **पूरक कोण** (Complementary angle) कहलाते हैं।



(i) (ii)

क्या ये दोनों कोण पूरक कोण हैं ? - हाँ



(i) (ii)

क्या ये दोनों कोण पूरक कोण हैं ? - नहीं

पूरक कोण, परस्पर कोण एक-दूसरे के पूरक होते हैं। **जैसे** : 30° का पूरक कोण 60° होगा तथा 60° का पूरक कोण 30° होगा।

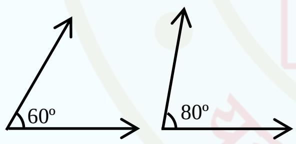
सोचिए –

(i) समकोण का पूरक कोण क्या होता है ?

(ii) क्या दो कोण एक-दूसरे के पूरक हो सकते हैं ?

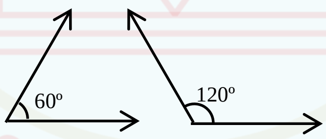
सम्पूरक कोण –

जब दो कोणों का योग 180° होता है तो ये कोण एक-दूसरे के **सम्पूरक कोण** कहलाते हैं । नीचे दिए गए कोणों के युग्म में कौन-कौन से सम्पूरक कोण है।



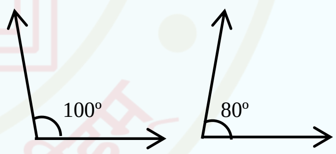
आकृति 1

$(60^0 + 80^0 \neq 180^0)$



आकृति 2

$(60^0 + 120^0 = 180^0)$

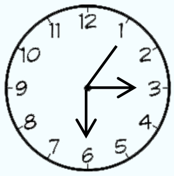


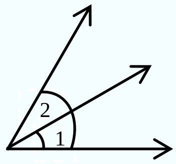
आकृति 3

$(80^0 + 100^0 = 180^0)$

हम देखते हैं कि उपर्युक्त युग्म में आकृति (i) को छोड़कर आकृति (ii) एवं आकृति (iii) के कोणों का माप 180° है । अतः आकृति (ii) एवं (iii) कोणों के ऐसे युग्म सम्पूरक कोण (Supplementary Angles) कहलाते हैं ।

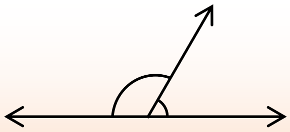
आसन्न कोण -

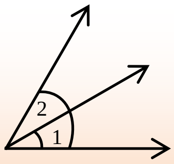




उपर्युक्त चित्रों में आपको दो-दो कोण आपस में जुड़े हुए दिख रहे हैं। कोणों के ऐसा युग्म जिसमें एक उभयनिष्ठ शीर्ष तथा एक उभयनिष्ठ भुजा हो **आसन्न कोण** कहलाता है।

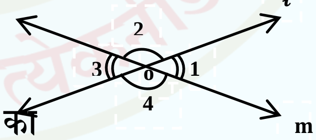
रैखिक युग्म – एक रैखिक युग्म (linear pair) ऐसे आसन्न कोणों का युग्म होता है जिनकी वे भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं है, विपरीत दिशा में किरणें होती हैं।





क्या $\angle 1$ व $\angle 2$ रैखिक युग्म है ? – हाँ	क्या $\angle 1$ व $\angle 2$ रैखिक युग्म है ? – नहीं
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$	$\angle 1 + \angle 2 \neq 180°$

सम्मुख कोण (शीर्षाभिमुख कोण) : जब दो रेखाएँ एक बिन्दु (शीर्ष बिन्दु) पर प्रतिच्छेद (काटती) करती है, तो दोनों रेखाओं के आमने-सामने बनने वाले कोण को **शीर्षाभिमुख कोण** कहते हैं।

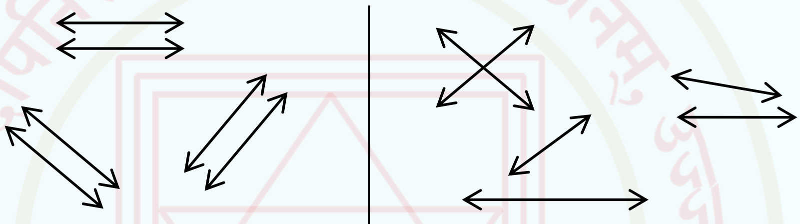


ज्यामिति का उपयोग करते हुए इसे सिद्ध करने का प्रयास करते हैं। दो रेखाएँ ℓ और m लेते हैं। मान लीजिए दोनों रेखाएँ जो एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करती हैं और इस प्रकार $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ निर्मित करती हैं।

➢ उपर्युक्त आकृति में 4 कोण होते हैं, जिसमें कोण 1 कोण 3 तथा कोण 2 कोण 4 के बराबर है यह कोण युग्म $\angle 1$, $\angle 3$ तथा $\angle 2$, $\angle 4$ शीर्षाभिमुख कोण कहलाते हैं ।

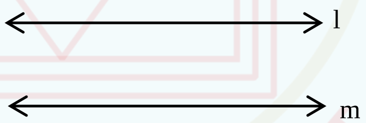
सोचिए – जब दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती है, तो कितने कोण बनते हैं ?

रेखा युग्म – नीचे दिए गए रेखा युग्मों को देखिए –

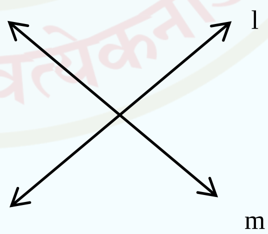


समान्तर रेखा है। **समान्तर रेखाएँ नहीं है।**

समान्तर रेखा – दो समतलीय रेखाएँ जो एक-दूसरे को नहीं काटती हैं, वे **समान्तर रेखा** कहलाती हैं। जैसे –

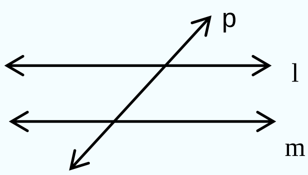


प्रतिच्छेदी रेखा – ऐसी दो रेखाएँ जो एक-दूसरे को काटती हैं, वे **प्रतिच्छेदी रेखाएँ** कहलाती हैं। जैसे –



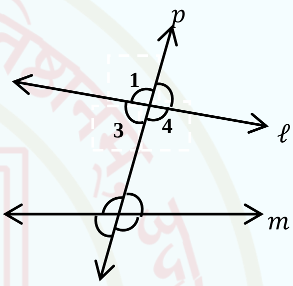
तिर्यक् छेदी रेखाएँ –

दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा **तिर्यक् छेदी रेखा** कहलाती है।



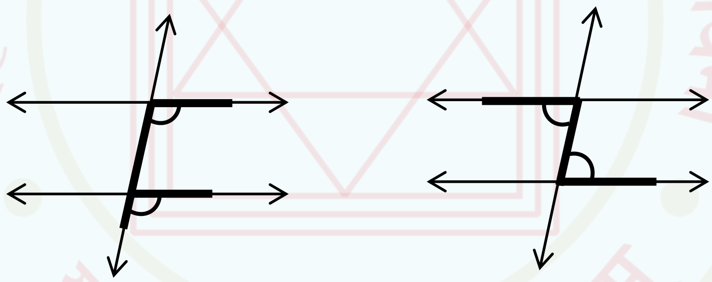
उपर्युक्त चित्र में रेखा युग्म ℓ तथा m को तिर्यक् रेखा P दो अलग बिन्दुओं पर काटती है।

तिर्यक् छेदी रेखा द्वारा बनने वाले कोण - जब रेखा ℓ व m को तिर्यक् छेदी रेखा p काटती है, तो 8 विभिन्न कोण बनते हैं चित्र में 8 कोणों को देखिए –



इन कोणों में बाहर की ओर बनने वाले कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 7$ व $\angle 8$ हैं ये बाह्य कोण कहलाते हैं। इसी प्रकार अंदर की ओर बनने वाले कोण $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ व $\angle 6$ अन्त कोण कहलाते हैं।

संगत कोण F आकार बनाते हैं।

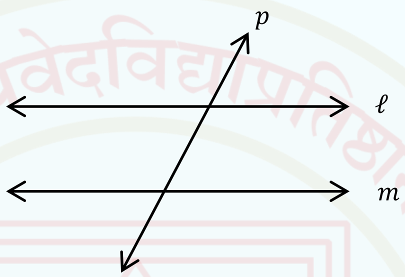


संगत कोण में F आकार बनता हैं। **एकान्तर कोण में Z आकार बनता हैं।**

कोणों के प्रकार	**कोण**
संगत कोण – युग्म	$\angle 1$ व $\angle 5$, $\angle 2$ व $\angle 6$ $\angle 3$ व $\angle 7$, $\angle 4$ व $\angle 8$
एकान्तर अन्तः कोण युग्म	$\angle 3$ व $\angle 6$, $\angle 5$ व $\angle 4$
एकान्तर बाह्य कोण युग्म	$\angle 1$ व $\angle 8$, $\angle 2$ व $\angle 7$

तिर्यक् छेदी रेखा के एक ही ओर बने अन्त कोण युग्म	$\angle 3$ व $\angle 5$, $\angle 4$ व $\angle 6$
तिर्यक् छेदी रेखा के एक ही ओर बने बाह्य कोण युग्म	$\angle 1$ व $\angle 7$, $\angle 2$ व $\angle 8$

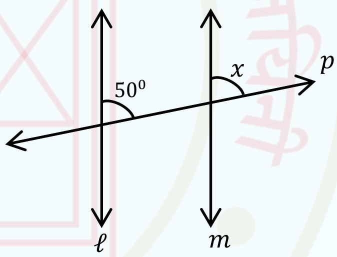
समान्तर रेखाओं की तिर्यक् छेदी रेखा –



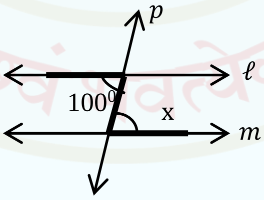
जब दो समान्तर रेखा को कोई तिर्यक् रेखा काटती है तब –

1. **संगत कोण आपस में समान होते हैं ।**

उपर्युक्त में ℓ व m समान्तर रेखा ($\ell \parallel m$) है । अतः तिर्यक् रेखा के प्रतिच्छेद करने पर संगत समान है। अतः $x = 50^{\circ}$

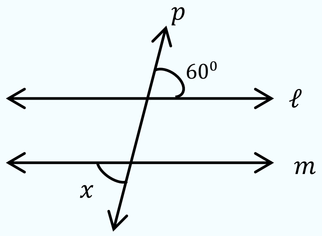


2.**एकान्तर अन्तकोण समान होते हैं।**



उपर्युक्त में ℓ व m समान्तर रेखा ($\ell \parallel m$) है । P एक तिर्यक् छेदी रेखा है। अतः $x = 100^{\circ}$ है।

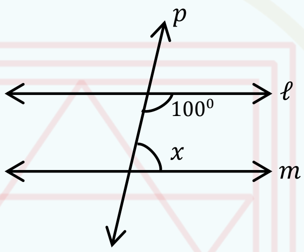
3. **एकान्तर बाह्य कोण समान होते हैं।**



उपर्युक्त में ℓ व m समान्तर रेखा ($\ell \parallel m$) है । P एक तिर्यक् छेदी रेखा है।

अतः $x = 60^o$ है।

4. तिर्यक् रेखा के एक ओर बनने वाले अंतःकोण सम्पूरक होते हैं।



उपर्युक्त में ℓ व m समान्तर रेखा ($\ell \parallel m$) है । P एक तिर्यक् छेदी रेखा है।

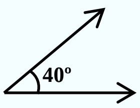
अतः अन्त कोणों का प्रत्येक युग्म सम्पूरक होता है।

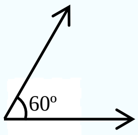
$$100° + x = 180°$$
$$x = 180° - 100°$$
$$x = 80°$$

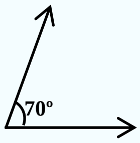
अतः $x = 80^o$

अभ्यास प्रश्नावली - 6

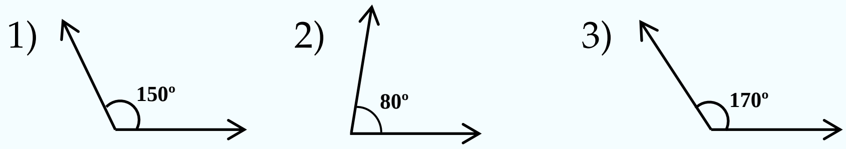
1. निम्न कोणों में से प्रत्येक का पूरक कोण ज्ञात कीजिए ?

1) 

2) 

3) 

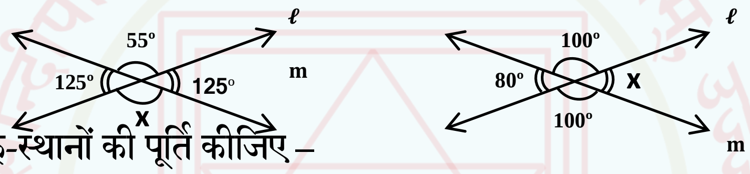
2. निम्नलिखित कोणों में से प्रत्येक का सम्पूरक कोण ज्ञात कीजिए ?



3. कोणों के निम्नलिखित युग्मों में से पूरक एवं सम्पूरक युग्मों को अलग-अलग लिखिए –

(i) 64°, 26° (ii) 65°, 115° (iii) 45°, 45°

4. निम्नलिखित में प्रत्येक के कोण x^0 ज्ञात कीजिए –



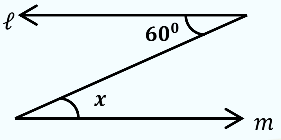
5. रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(180°, 60°, 80°, 1, 90°, बराबर, रैखिक युग्म, 180°)

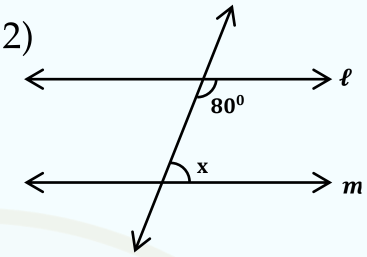
1. यदि दो कोण पूरक हैं तो उनके मापों का योग .... है।
2. यदि दो सम्पूरक कोण हैं, तो उनके मापों का योग .... है।
3. शीर्षाभिमुख कोण आपस में .... होते हैं।
4. 30° का पूरक कोण .... है।
5. 100° का सम्पूरक कोण .... है।
6. आसन्न कोण में कितने उभयनिष्ठ शीर्ष .... होते हैं।
7. रैखिक युग्म बनाने वाले दो कोण का माप .... होता है।
8. दो आसन्न कोण सम्पूरक है तो वे .... बनाते हैं।

6. यदि ℓ व m समान्तर रेखा ($\ell \parallel m$) हो तो x का मान बताइये।

1)



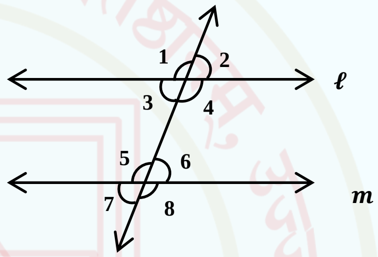
2)



6. दिए गए चित्र में बताइये –

(1) अन्त कोणों के नाम

(2) बाह्य कोण के नाम



7. रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए –

1. यदि $\ell \parallel m$ रेखा किसी एक तिर्यक् रेखा के एक ही ओर बने तो कोण का प्रत्येक युग्म .... का होता है। (180° / 90°)

2. एकान्तर कोण में .... आकृति बनती है। (F / Z)

3. संगत कोण .... आकार बनता है। (Z / F)

अध्याय 7

राशियों की तुलना

अनुपात – दो अनुपात संख्या या राशियों की विभाजन से तुलना एक अनुपात कहा जाता है। अनुपात को व्यक्त करने के सङ्केत ‘ : ’ का प्रयोग किया जाता है इसके लिए दोनों राशियों एक ही इकाई में होनी चाहिए।

- एक अनुपात एक भिन्न के रूप में समझा जा सकता है।

उदाहरण : पूजन के कार्यक्रम में उपयोग होने वाले बाजोट की लम्बाई 50 से.मी. है तथा चौड़ाई 80 से.मी. है तो बाजोट की लम्बाई तथा चौड़ाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : बाजोट की लम्बाई = 50 से.मी., बाजोट की चौड़ाई = 80 से.मी.

तब, अनुपात $= \dfrac{\text{बाजोट की लम्बाई}}{\text{बाजोट की चौड़ाई}}$

$= \dfrac{50 \text{ से.मी.}}{80 \text{ से.मी.}}$

$= \dfrac{5 \text{ से.मी.}}{8 \text{ से.मी.}}$

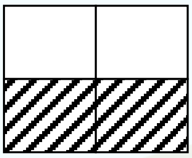
अतः अभीष्ट अनुपात 5 : 8 प्राप्त है।

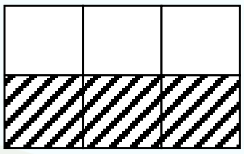
उदाहरण : अनुपात को सरल रूप में बदलिए -

(1) $\dfrac{25}{45} = \dfrac{25 \div 5}{45 \div 5} = \dfrac{5}{9}$

(2) $\dfrac{32}{24} = \dfrac{32 \div 8}{24 \div 8} = \dfrac{4}{3}$

तुल्य अनुपात – दो अनुपात तुल्य कहलाते हैं यदि उनकी संगत भिन्न तुल्य हो । आकृतियों के माध्यम से समझाते हैं –





$\frac{2}{4}$ या $\frac{1}{2}$ $= \frac{3}{6}$ या $\frac{1}{2}$

अतः आकृति (1) व (2) का अनुपात

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$ (संगत अनुपात तुल्य है।)

उदाहरण : अनुपात 4 : 3 या 4/3 के तीन तुल्य अनुपात ज्ञात करें ।

हल : $\frac{4}{3}$ के तीन तुल्य अनुपात

$$\frac{4 \times 2}{3 \times 2} = \frac{8}{6}$$

$$\frac{4 \times 3}{3 \times 3} = \frac{12}{9}$$

$$\frac{4 \times 4}{3 \times 4} = \frac{16}{12}$$

तब, $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12}$

अतः तुल्य अनुपात $\frac{8}{6}, \frac{12}{9}, \frac{16}{12}$ है।

उदाहरण : अनुपात 5 : 7 के दो तुल्य अनुपात ज्ञात करें ।

हल : $\frac{5}{7}$ के तीन तुल्य अनुपात -

$$\frac{5 \times 2}{7 \times 2} = \frac{10}{6}$$

$$\frac{5 \times 3}{7 \times 3} = \frac{15}{21}$$

समानुपात – चार राशियाँ एक समानुपात में तब कही जायेगी, जब पहली राशि तथा दूसरी राशि का अनुपात तथा तीसरी एवं चौथी राशि के अनुपात के बराबर हो। इसे '::' से दर्शाते हैं।

उदाहरण : यदि 6 पुष्पमाला का मूल्य 60 रु. है। तब ऐसी ही 10 पुष्पमाला का मूल्य क्या होगा ?

हल : समानुपात के नियम से -

पुष्पमाला का अनुपात :: पुष्पमाला के मूल्यों के अनुपात

$$\frac{6}{10} :: \frac{60}{x}$$

चूंकि :: या =

$$\frac{6}{10} = \frac{60}{x}$$

$$x = \frac{60 \times 10}{6}$$

$$x = \frac{600}{6}$$

$$x = 100$$

अतः 10 पुष्पमालाओं का मूल्य 100 रु. होगा।

ऐकिक विधि से हल –

$\because$ 6 पुष्पमालाओं का मूल्य = 60

$\therefore$ 1 पुष्पमाला का मूल्य $= \frac{60}{6} = 10$ रु.

अतः 10 पुष्पमालाओं का मूल्य $= 10 \times 10 = 100$ रु.

सङ्केत

$\because$ - चूंकि

$\therefore$ - इसलिए

प्रतिशत - प्रतिशत का चिह्न (%) प्रतिशत शब्द दो शब्दों 'प्रति' तथा 'शत' के मिलने से बना है। प्रति का अर्थ है - 'प्रत्येक' अर्थात् 'Per' तथा शत का अर्थ है 'सैकड़ा' या 'सौ' या '100' ।

उदाहरण : मान लीजिए कि किसी छात्र ने 100 में से 40 अङ्क प्राप्त किए तो इसका अर्थ यह हुआ है कि उस छात्र ने 40 प्रतिशत (%) अङ्क प्राप्त किए।

प्रतिशत का चिह्न - प्रतिशत को किसी अङ्क के बाद चिह्न (%) को लगाकर व्यक्त किया जाता है। **जैसे:** 40 प्रतिशत को 40%

प्रतिशत एक भिन्न - प्रतिशत एक प्रकार का भिन्न है, जिसमें हर के स्थान पर हमेशा 100 होता है। $a\% = \frac{a}{100}$

जैसे: $40\% = \frac{40}{100}$

प्रतिशत को भिन्न में बदलना - प्रतिशत का चिह्न हटाकर 100 से भाग दें अथवा प्रतिशत का चिह्न हटाकर $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}$ से गुणा करें तथा प्राप्त भिन्न को सरल करें।

अर्थात् $a\% = \frac{a}{100}$

उदाहरण : 10% को साधारण भिन्न में बदलिए।

हल : $10\% = \frac{10}{100} = \frac{10}{10\times10} = \frac{1}{10}$

अतः 10% का साधारण भिन्न का मान $\frac{1}{10}$ है ।

दशमलव संख्या वाले प्रतिशत को साधारण भिन्न में बदलना -

1. सर्वप्रथम % का चिह्न हटाकर दी गई संख्या में 100 से भाग दें।

2. दशमलव हटाने के लिए 10, 100, 1000 आदि अङ्कों से आवश्यकता अनुसार भाग दीजिए।

3. भिन्न को सरल कर उत्तर प्राप्त करें।

उदाहरण : 0.4% को भिन्न में बदलें।

हल : दिया गया है - 0.4% $= \frac{0.4}{100}$

चूंकि यहाँ अंश में दशमलव के दायीं तरफ एक अङ्क है। अतः दशमलव हटाने के लिए $\frac{1}{10}$ गुणा करने पर

$$= \frac{4}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{4 \times 1}{100 \times 10} = \frac{1}{250}$$

प्रतिशत को दशमलव में बदलना

दशमलव ,संख्याओं को सटीक रूप में लिखने का एक रूप है। दशमलव बिन्दु का उपयोग करना। उदाहरण के लिए, 3.5 का अर्थ है 3 पूर्ण भाग और एक आधा (0.5) भाग। आइए , निम्न चरण-वार प्रतिशत को दशमलव में बदलने के लिए निम्न दिए गए चरणों का पालन करें:

- **चरण** 1: प्रतिशत चिह्न (%) निकालें।
- **चरण** 2: दायीं ओर से बायीं ओर दो अङ्कों की छलांग लगाकर दशमलव बिन्दु लगाएँ।

उदाहरणार्थ : 45% को दशमलव में बदलते हैं।

हल: 45% को बिना प्रतिशत चिह्न के 45 के रूप में लिखा जा सकता है। अब, यह एक पूर्ण संख्या है ।इसलिए दायें छोर पर दशमलव बिन्दु पर विचार करें। 45,

45.0 के समान है। अब, दशमलव बिन्दु को दो स्थान बायीं ओर खिसकाने पर, हमें 0.45 प्राप्त होता है। इसलिए, 45% = 0.45

भिन्न को प्रतिशत में बदलना -

नियम - 1. दिये गये भिन्न को 100 से गुणा करें।

2. आवश्यक गणना कर सरल करें।

3. प्राप्त व्यंजक में प्रतिशत (%) का चिह्न लगायें।

भिन्न $\frac{a}{b}\%$ तब $\frac{a}{b} \times 100$

उदाहरण : $\frac{3}{4}$ को प्रतिशत में बदलें।

हल : दिया गया भिन्न $= \frac{3}{4}$

प्रतिशत में बदलने के लिए 100 से गुणा करने पर हम पाते हैं।

$= \frac{3}{4} \times 100$
$= \frac{300}{4}$
$= 75\%$

या $= \frac{3}{4} \times 100$
$= \frac{3}{4} \times 25 \times 4$
$= 75\%$

किसी संख्या का दिया गया प्रतिशत निकालना –

उदाहरण : 300 का 4% ज्ञात करें -

हल : $300 \times \frac{4}{100} = 3 \times 4 = 12$

अतः 300 का 4% = 12 है।

उदाहरण : 20 का 40% ज्ञात करें।

हल : $\frac{20 \times 40}{100} = 2 \times 4 = 8$

अतः 20 का 40% = 8 है।

उदाहरण : 150 का 40% ज्ञात करें।

हल : $\frac{150 \times 40}{100} = 15 \times 4 = 60$

अतः 150 का 40% = 60 है।

उदाहरण : एक व्यापारी एक कुर्सी पर 10% की छूट देता है, यदि कुर्सी का मूल्य 1000 रुपये है, तो बताइये ग्राहक को एक कुर्सी खरीदने के लिए कितने रुपये देने होंगे ?

हल : दिया है, एक व्यापारी 1000 रुपये की एक कुर्सी पर 10 % की छूट देता है।

अर्थात् , 1000 का 10% $= \frac{1000 \times 10}{100} = 100$

तब, 1000 – 100 = 900

अत: ग्राहक को एक कुर्सी खरीदने के लिए 900 रुपये देने होंगे ।

नोट :- हम ऐसा समझ सकते हैं कि एक (%) प्रतिशत से दो शून्य हट जाते हैं कि ओर प्रश्न को शीघ्र हल कर सकते हैं।

उदाहरण : एक गुरुकुल में 30 विद्यार्थियों की कक्षा में 50% विद्यार्थी क्रिकेट खेलना पसन्द करते हैं तो क्रिकेट पसन्द करने वाले विद्यार्थियों की संख्या क्या है ?

हल : क्रिकेट पसन्द करने वाले विद्यार्थी = 30 का 50%

$$= 30 \times \frac{50}{100}$$
$$= 3 \times 5$$
$$= 15$$

अतः 15 विद्यार्थी क्रिकेट खेलना पसन्द करते हैं।

उदाहरण : विशाल ने वेद की परीक्षा मूल्यांकन में 50 में से 30 अङ्क प्राप्त हुए, तो बताओ विशाल ने कितने प्रतिशत अङ्क प्राप्त किए ?

हल : दिया है - 50 में से 30 अङ्क प्राप्त किए

$$= \frac{\text{प्राप्तांक}}{\text{पूर्णाङ्क}} \times 100\%$$

अतः $= \frac{30}{50} \times 100\%$

$= 60\%$

अतः विशाल ने 60% अङ्क प्राप्त किए।

किसी वस्तु से सम्बन्धित क्रय मूल्य तथा विक्रय मूल्य-

क्रय मूल्य (खरीदना) - जिस मूल्य पर कोई वस्तु खरीदी जाती है,तो वह मूल्य उसका **क्रय मूल्य** (Cost Price) कहलाता है। इसे संक्षिप्त में क्र.मू. (C.P.) लिखा जाता है।

विक्रय मूल्य (बेचना) - जिस मूल्य पर कोई वस्तु बेची जाती है,तो वह मूल्य उसका **विक्रय मूल्य** (Selling Price) कहलाता है। इसे संक्षिप्त में वि.मू. (S.P.) लिखा जाता है।

लाभ (Profit) - जब कोई वस्तु कम दाम में खरीदी (क्रय) की जाती है और अधिक दाम में बेची (विक्रय) की जाती है। अर्थात्

विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य

तब, **लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य**

Profit = SP – CP

हानि (Loss) - लाभ की स्थिति के विपरीत जब कोई वस्तु अधिक दाम में खरीदी (क्रय) की जाती है और कम दम में बेची (विक्रय) की जाती है। अर्थात्

विक्रय मूल्य $<$ क्रय मूल्य

तब, **हानि = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य**

loss = CP – SP

लाभ एवं हानि प्रतिशत में : लाभ-हानि को प्रतिशत के रूप में ज्ञात किया जा सकता है। ध्यान रखिए कि लाभ-हानि को प्रतिशत सदैव क्रय मूल्य (खरीदने वाले मूल्य) पर निकाला जाता है। **लाभ प्रतिशत** $= \dfrac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times \mathbf{100}$

हानि प्रतिशत $= \dfrac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times \mathbf{100}$

उदाहरण : यदि दुकानदार एक कुर्सी 250 रु. में खरीदता है तथा ग्राहक को 300 में बेचता है। उसे कितना लाभ हुआ ?

हल : विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य

$300 > 250$

अतः, **लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य**

= 300 – 250 = 50 रु.

तब, **लाभ प्रतिशत** $= \dfrac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times \mathbf{100}$

$$= \frac{50}{250} \times 100$$

$$= \frac{5000}{250}$$

$$= \frac{5000 \div 250}{250 \div 250} = \frac{20}{1} = 20\%$$

उदाहरण : यदि दुकानदार ने एक खिलोना कार 100 रु. में खरीद कर उसे 80 रु. में ग्राहक को बेच दिया। तो हानि प्रतिशत कितना होगा ?

हल : विक्रय मूल्य < क्रय मूल्य

$80 < 100$

तब, **हानि** = **क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य**

$= 100 - 80 \quad = 20$

अब, **हानि प्रतिशत** $= \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times \mathbf{100}$

$= \frac{20}{100} \times 100 \quad = 20\%$

उदाहरण : एक वस्तु 50 रु. में क्रय की गई तथा 10 प्रतिशत लाभ पर बेच दी गई तो उसका विक्रय मूल्य क्या होगा ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है क्रय मूल्य = 50 रु.

अतः विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + क्रय मूल्य का 10%

$= 50 + \left(50 \times \frac{10}{100}\right)$

$= 50 + 5 \quad = 55$

अतः विक्रय मूल्य 55 रु. है।

उदाहरण : उमाशंकर ने एक कुलर अपने मित्र अजित को 10 प्रतिशत हानि के साथ 3500 रु. में को बेच देता है तब बताइये उमाशंकर ने कुलर कितने रुपये में क्रय किया था।

हल : दिया है विक्रय मूल्य = 50 रु.

अतः क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य + विक्रय मूल्य का 10%

$= 3500 + \left(3500 \times \frac{10}{100}\right)$

$= 3500 + 350$

$= 3850$

अतः क्रय मूल्य 3850 रु. है ।

अभ्यास प्रश्नावली - 7

1. गुरुकुल के एक कक्ष की लम्बाई 14 मीटर तथा चौड़ाई 20 मीटर है । कक्ष की लम्बाई चौड़ाई का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

3. सरल रूप में बदलिए – (i) $\frac{12}{16}$ (ii) $\frac{45}{20}$

4. निम्नलिखित अनुपातों के दो तुल्य अनुपात ज्ञात करें –

   (i) $\frac{5}{3}$ (ii) 2 : 3

5. एक दुकानदार 3 पञ्च-पात्रों का सेट 150 रु. में देता है तो 2 पञ्च-पात्रों का मूल्य क्या होगा ?

1. दिए गए प्रतिशत को साधारण भिन्न में बदलिए ?

   (1) 13% (2) 15%

2. दी गई दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए ?

   (1) 0.9% (2) 0.7%

3. दी गई भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए ?

   (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{7}{2}$

4. ज्ञात कीजिए -

   (1) 300 का 12% (2) 50 का 70% (3) 40 का 50%

5. एक समूह के 50 सदस्यों में से 20 ने रक्तदान दिवस पर रक्त दान किया। तो बताइये कितने प्रतिशत सदस्यों ने रक्तदान किया ?

6. पाठशाला के 200 विद्यार्थियों में से वेदभूषण द्वितीय वर्ष की कक्षा में 40 विद्यार्थी अध्ययन करते हैं। तो बताइये कितने प्रतिशत विद्यार्थी द्वितीय वर्ष में अध्ययन करते हैं ?

7. राष्ट्रिय आदर्श वेद विद्यालय के 200 विद्यार्थियों में से 15% विद्यार्थी सामवेद तथा 20% विद्यार्थी शुक्ल यजुर्वेद माध्यन्दिन शाखा में अध्ययन करते हैं तो बताइए कितने विद्यार्थी सामवेद तथा शुक्ल यजुर्वेद का अध्ययन करते हैं।

9. एक वेद पाठशाला के 50 विद्यार्थियों में से 20% विद्यार्थी शुक्लयजुर्वेद माध्यन्दिन शाखा तथा 15% विद्यार्थी काण्व शाखा में अध्ययन करते हैं तो बताइए कितने विद्यार्थी माध्यन्दिन तथा काण्व शाखा में अध्ययन करते हैं।

2. राहुल ने एक पुस्तक 200 रु. में खरीदी जिसमें 12% लाभ पर राम को बेच दी, तो पुस्तक का विक्रय मूल्य क्या है ?

3. एक आलू के कट्टें का दाम 500 रु. है, जिसे 3% लाभ पर बेचा गया तो बताइये आलू के कट्टें का विक्रय मूल्य क्या होगा ?

अध्याय 8

परिमेय संख्या

- 1, 2, 3, 4, 5 .... प्राकृत संख्याओं में 0 को सम्मिलित करने पर हमें पूर्ण संख्याओं का समूह (0, 1, 2, 3, 4 ....) प्राप्त होता है। पूर्ण संख्याओं के समूह में ऋणात्मक संख्या (...... –3, –2, –1) को सम्मिलित करने पर हमें पूर्णाङ्क संख्याओं का समूह (...... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...) प्राप्त होता हैं।

प्राकृत संख्याएँ	पूर्ण संख्या	पूर्णाङ्क
1, 3, 4, 9, 8, 5, 2, 7	0, 1, 2, 7, 6, 8, 70, 100	–3 –2 –1 –6 0 12 5 7

परिमेय संख्या – यदि किसी संख्या को दो पूर्णांक संख्याओं के अनुपात के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, तो उसे परिमेय संख्या कहते हैं । यहाँ $\frac{p}{q}$ के अनुपात $\boldsymbol{p : q}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ $\boldsymbol{q \neq 0}$ ($\boldsymbol{q = 0}$ नहीं होना चाहिए) हो, **परिमेय संख्याएँ** कहलाती है।

परिमेय संख्याएँ = { $\frac{p}{q}$ /जहाँ $q \neq 0$ एवं p , q ∈ पूर्णाङ्क संख्या (I) }

- परिमेय संख्याओं के गुणन एवं भाग में चिह्नों के गुणन '**भागहारेऽपि चैवं निरुक्तम्**' के नियमानुसार होते हैं। **उदाहरण** : $\frac{2}{3}, \frac{-2}{5}$ आदि परिमेय संख्याएँ हैं।

अंश एवं हर - एक परिमेय संख्या जो कि $\frac{p}{q}$ के रूप में होती है। जहाँ p को अंश तथा q को हर कहते हैं । परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ में 2 अंश तथा 3 हर है। इस प्रकार $-\frac{5}{6}$ में (– 5) अंश तथा 6 हर है।

परिमेय संख्याओं के सम्बन्ध में कुछ सामान्य प्रश्नों कि कक्षा में चर्चा चल रही हैं।-

गुरुजी : क्या सभी प्राकृत संख्याएँ परिमेय संख्याएँ हैं ?

प्रत्युष : हाँ, सभी प्राकृत संख्याएँ परिमेय संख्याएँ हैं। 1, 2, 3, 4 .... प्राकृत संख्याएँ हैं। चूंकि सभी प्राकृत संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

जैसे : 2 को $\frac{2}{1}$, 3 को $\frac{3}{1}$

अतः, सभी प्राकृत संख्या परिमेय संख्या होती है।

गुरुजी : क्या सभी पूर्णाङ्क परिमेय संख्याएँ हैं ?

आराध्य : जैसे 0, –3, 1, 3, –4, 5 .... आदि पूर्णाङ्क हैं।

चूंकि –3 को $\frac{-3}{1}$, 4 को $\frac{4}{1}$, –5 को $\frac{-5}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जो कि $\frac{p}{q}$ के रूप में है।

अतः, सभी पूर्णाङ्क परिमेय संख्याएँ होती हैं। शून्य जो कि पूर्ण संख्या है वह भी परिमेय संख्या है। क्योंकि 0 को $\frac{0}{1}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

गुरुजी : क्या सभी भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं ?

उत्सव : हाँ सभी भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं, क्योंकि भिन्न $\frac{p}{q}$ के रूप में होते हैं।

जहाँ $q \neq 0$ होता है ।

गुरुजी : क्या $\frac{4}{0}$ एक परिमेय संख्या है ?

लक्ष्मी: नहीं, $\frac{4}{0}$ एक परिमेय संख्या नहीं है। क्योंकि एक परिमेय संख्या का हर शून्य नहीं होता है तथा $\frac{4}{0}$ का हर 0 है।

गुरुजी : बहुत अच्छे ! आपने सभी प्रश्नों के सही उत्तर दिये।

समतुल्य परिमेय संख्या - किसी परिमेय संख्या के अंश और हर को समान संख्या से गुणा करके अथवा भाग देकर इन्हें इच्छित अंश अथवा हर में बदल सकते हैं।

परिमेय संख्या $\frac{(-2)}{3}$ पर विचार करते हैं।

$$\frac{(-2)}{3} = \frac{(-2)\times 2}{3\times 2} = \frac{(-4)}{6}$$

$$\frac{(-2)}{3} = \frac{(-2)\times 3}{3\times 3} = \frac{(-6)}{9}$$

$$\frac{(-2)}{3} = \frac{(-2)\times(-4)}{3\times(-4)} = \frac{8}{(-12)} \text{ या } \frac{(-8)}{12}$$

अत: $\frac{(-2)}{3} = \frac{(-4)}{6} = \frac{(-6)}{9} = \frac{(-8)}{12}$ समतुल्य परिमेय संख्या है।

आइये, एक अन्य परिमेय संख्या $\frac{(-30)}{25}$ पर विचार कीजिए।

$$\frac{(-30)\div 5}{25\div 5} = \frac{(-6)}{5}$$

$$\frac{(-30)\div(-5)}{25\div(-5)} = \frac{6}{(-5)} \text{ या } \frac{(-6)}{5}$$

अतः, $\frac{(-30)\div 5}{25\div 5} = \frac{(-6)}{5}$ के समतुल्य है।

ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हों एक-दूसरे के समतुल्य या तुल्य कहीं जाती है।

धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ :

परिमेय संख्याएँ जिनमें अंश तथा हर दोनों धनात्मक हों या दोनों ऋणात्मक

हों , तब धनात्मक परिमेय संख्याएँ होती हैं तथा अंश एवं हर दोनों में से कोई एक ऋण होने पर ऋणात्मक परिमेय संख्या होती है।

जैसे : 1. $\frac{2}{3}, \frac{11}{13}, \frac{2}{5}$ यहाँ अंश एवं हर दोनों ही धनात्मक हैं।

2. $\frac{-2}{-3}, \frac{-11}{-15}, \frac{-7}{-5}$ यहाँ अंश एवं हर दोनों ही ऋणात्मक हैं।

$\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है ।

3. $\frac{-2}{3}, \frac{11}{-15}$ यहाँ अंश एवं हर दोनों में से एक ऋण है, अत: ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु - शून्य न तो धनात्मक परिमेय संख्या है और न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

मानक रूप में परिमेय संख्या –

परिमेय संख्या जिसका हर धनात्मक पूर्णाङ्क हो तथा उसके अंश तथा हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखण्ड नहीं हो (अंश एवं हर को 1 के अभाव में किसी से विभाजित न किया जा सके) तो उस परिमेय संख्या का मानक रूप कहा जाता है। **उदाहरण :** $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{11}{13}$

➢ **विचार कीजिए -**

- संख्या $\frac{3}{4}$ एक मानक रूप में व्यक्त की गई परिमेय संख्या है ?

  हाँ , क्योंकि इसका हर धनात्मक है, तथा अंश एवं हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखण्ड नहीं है।

- क्या $\frac{4}{6}$ एक मानक रूप में व्यक्त परिमेय संख्या है ?

नहीं ,क्योंकि 4 व 6 का सार्व गुणनखण्ड 2 और 1 है। इसे मानक रूप में

व्यक्त करने के लिए $\frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$

अतः $\frac{4}{6}$ का मानक रूप $\frac{2}{3}$ है।

उदाहरण : $\frac{(-12)}{18}$ को मानक रूप में बदलिए -

हल : $\frac{(-12)}{18}$

12, 18 का महत्तम समापवर्तक = 6 है।

या 12, 18 के सार्व गुणनखण्ड (1, 2, 3, 6) है।

अतः मानक रूप अंश एवं हर को 6 से भाग देने पर

$$= \frac{(-12) \div 6}{18 \div 6} = \frac{(-2)}{3}$$

अतः $\frac{(-12)}{18}$ का मानक रूप $\frac{(-2)}{3}$ है।

परिमेय संख्याओं की तुलना (= , > एवं <) -

वैदिक विधि (ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्)

उदाहरण : परिमेय संख्या $\frac{3}{5}$ तथा $\frac{6}{7}$ की तुलना करें ?

हल : दी गई परिमेय संख्या है

$\frac{3}{5}$ तथा $\frac{6}{7}$ (सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् से गुणन करने पर)

$$\frac{3}{5} \quad \frac{6}{7}$$

या 3×7 तथा 6×5

स्पष्ट है कि $21 \boxed{<} 30$

अतः $\frac{3}{5} \boxed{<} \frac{6}{7}$

प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं में से धनात्मक तथा ऋणात्मक परिमेय संख्या को पृथक कीजिए।

   $\left(\frac{-2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{-4}{-5}, \frac{2}{7}, \frac{-2}{-1}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{-7}, \frac{+8}{+3}\right)$

2. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं की तीन-तीन समतुल्य परिमेय संख्याएँ लिखिए।

   1) $\frac{5}{3}$ 2) $\frac{-2}{7}$ 3) $\frac{-4}{-7}$

3. मानक रूप में बदलिए -

   1) $\frac{-14}{12}$ 2) $\frac{36}{30}$ 3) $\frac{-25}{45}$

4. तुलना सङ्केत (= , > एवं <) में से सही सङ्केत चुनकर रिक्त-स्थानों को भरिए -

   1) $\frac{3}{5} \; \square \; \frac{-4}{7}$ 2) $\frac{-3}{7} \; \square \; \frac{4}{5}$ 3) $\frac{4}{3} \; \square \; \frac{3}{7}$

   4) $\frac{-5}{-4} \; \square \; \frac{-2}{-3}$ 5) $\frac{5}{7} \; \square \; \frac{7}{9}$ 6) $\frac{9}{1} \; \square \; \frac{1}{4}$

   7) $\frac{4}{6} \; \square \; \frac{2}{3}$ 8) $\frac{5}{9} \; \square \; \frac{4}{6}$

5. निम्नलिखित में प्रत्येक में से कौन-सी परिमेय संख्या बड़ी है -

   1) $\frac{-2}{3}, \frac{5}{5}$ 2) $\frac{-5}{6}, \frac{-3}{4}$

   3) $\frac{-3}{1}, \frac{4}{3}$ 4) $\frac{2}{3}, \frac{1}{-4}$

6. सत्य / असत्य लिखिए -

   1. शून्य न तो धनात्मक परिमेय संख्या है और ना ही ऋणात्मक संख्या

है।

2. $\frac{-4}{6}$ का मानक रूप $\frac{2}{3}$ है।

3. $\frac{-4}{-7}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

4. संख्याएँ $\frac{2}{5}$ एवं $\frac{3}{5}$ में बड़ी परिमेय संख्या $\frac{3}{5}$ है।

5. ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हों एक दूसरे की तुल्य परिमेय कही जाती हैं।

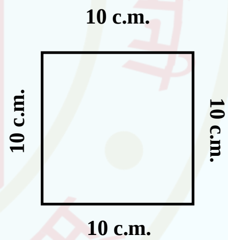
अध्याय 9

परिमाप और क्षेत्रफल

- ➢ एक बन्द आकृति के चारों ओर की दूरी का माप **परिमाप** कहलाता है।
- ➢ एक बन्द आकृति द्वारा घेरे गये तल के भाग या क्षेत्र को **क्षेत्रफल** कहते हैं।

पूर्व कक्षा में किए गए अध्ययन सूत्र को दोहराते हैं-

- वर्ग का परिमाप = 4 × एक भुजा
- वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा
- आयत का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)
- आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई



उदाहरण : एक वर्गाकार मैदान की भुजा 10 मीटर है तो परिमाप एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है - वर्गाकार मैदान की एक भुजा = 10 मीटर

तब, **वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा**

= 4 × 10 मीटर = 40 मीटर

तथा, **वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा**

= 10 मी. × 10 मी.

= 100 मीटर × मीटर = 100 (मी.)^2

अतः वर्गाकार मैदान का परिमाप 40 मीटर तथा क्षेत्रफल 100 (मी.)^2 है।

उदाहरण : एक आयताकार श्यामपट्ट की लम्बाई 4 मीटर तथा चौड़ाई 3 मीटर है, तो आयत का परिमाप एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, आयताकार श्याम पट्ट की लम्बाई = 4 मीटर, चौड़ाई = 3 मीटर

तब, **आयत का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)**

= 2 (4 मीटर + 3 मीटर)

= 2 (7 मीटर) = 14 मीटर

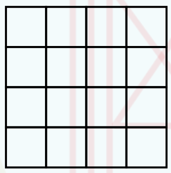
तथा, **आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई**

= 4 मीटर × 3 मीटर

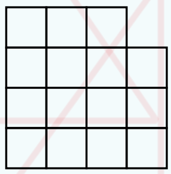
= 12 (मीटर × मीटर) = 12 (मीटर)^2

अतः आयताकार श्यामपट्ट का परिमाप 14 मीटर तथा क्षेत्रफल 12 (मीटर)^2 है।

➢ **सोचिए -**



आकृति 1



आकृति 2

1. उपर्युक्त आकृति 1 तथा आकृति 2 का परिमाप बराबर है या नहीं ?
2. उपर्युक्त आकृति 1 एवं आकृति 2 का क्षेत्रफल बराबर(समान) है या नहीं ?

उदाहरण : एक आयताकार शीट का क्षेत्रफल 100 (से. मी.)^2 यदि शीट की चौड़ाई 20 से.मी. है तो लम्बाई क्या होगी ?

हल : दिया है आयताकार शीट का क्षेत्रफल = 100 (से. मी.)^2

चौड़ाई = 20 से.मी., लम्बाई = ज्ञात करना है।

हम जानते हैं कि –

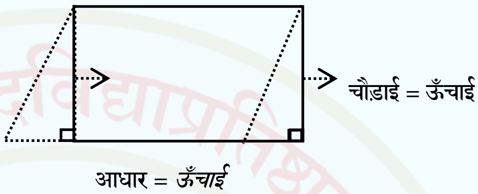
$$\textbf{आयताकार शीट का क्षेत्रफल} = \textbf{लम्बाई} \times \textbf{चौड़ाई}$$

$$100 = \text{लम्बाई} \times 20$$

या $$\text{लम्बाई} = \frac{100}{20} \text{ से.मी.} = 5 \text{ से.मी.}$$

अतः आयताकार शीट की लम्बाई 5 से.मी. है।

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल –



समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

आधार × ऊँचाई = लम्बाई × चौड़ाई

यहाँ आयत की लम्बाई (l) तथा चौड़ाई (b) क्रमशः समान्तर चतुर्भुज का आधार (b) और ऊँचाई (h) है।

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

आधार × ऊँचाई = लम्बाई × चौड़ाई

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $b \times h$

उदाहरण : एक समान्तर चतुर्भुज की एक भुजा 5 से.मी. तथा संगत ऊँचाई 6 से.मी. है। समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,समान्तर चतुर्भुज की भुजा आधार की लम्बाई (b) = 5 से.मी.

आधार की ऊँचाई (h) = 6 से.मी.

तब, **समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = लम्बाई × ऊँचाई**

= 5 से.मी. × 6 से.मी.= 30से. मी.^{2}

उदाहरण : एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 30(मीटर)^2 है जिसकी एक भुजा

10 मीटर हो तो ऊँचाई ज्ञात करें ।

हल : दिया है -समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 30(मीटर)^2 एवं एक भुजा = 10 मीटर

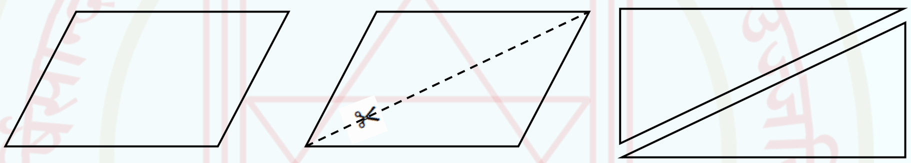
हम जानते हैं,**समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = लम्बाई × ऊँचाई**

$$30(\text{मीटर})^2 = 10 \text{ मीटर} \times \text{ऊँचाई}$$

या ऊँचाई $= \dfrac{30(\text{मीटर})^2}{10 \text{ मीटर}}$

या ऊँचाई = 3 मीटर

त्रिभुज का क्षेत्रफल -किसी समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण, समान्तर चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में बाँटता है ।

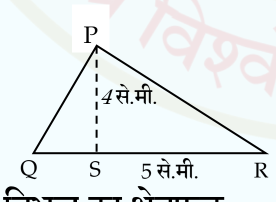


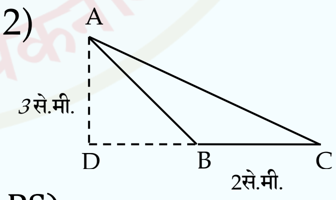
आप उपर्युक्त आकृतियों को देखकर समझ सकते हैं कि

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई) या $\frac{1}{2}$ ($\mathbf{b} \times \mathbf{h}$)

उदाहरण : निम्न त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें -

1) 

2) 

हल : 1) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (QR × PS)

$$= \frac{1}{2}(5\text{से.मी.} \times 4\text{से.मी.}) = \left(\frac{20}{2}\right)\text{से.मी.}^2 = 10(\text{से.मी.})^2$$

2) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (BC × AD)

$$= \frac{1}{2}\,(2\text{से. मी.}\times 3\text{से. मी.})$$

$$= \left(\frac{6}{2}\right)\text{से. मी.}^2 \;=\; 3(\text{से. मी.})^2$$

उदाहरण : किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 6 से.मी. एवं ऊँचाई 4 से.मी. है।

हल : दिया है - त्रिभुज का आधार = 6 से.मी., ऊँचाई = 4से.मी.

हम जानते हैं,कि **त्रिभुज का क्षेत्रफल** = $\frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई)

$$= \frac{1}{2}\,(6\text{से. मी.}\times 4\text{से. मी.})$$

$$= \left(\frac{24}{2}\right)\text{से. मी.}^2 \;=\; 12(\text{से. मी.})^2$$

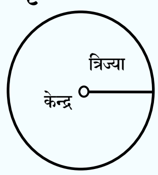
वृत्त - यदि कोई आकार घुमावदार या वक्राकार होता है, तो वह वृत्त का आकार कहलाता है।

किसी एक निश्चित बिन्दु से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ **वृत्त** कहलाता है। यह निश्चित बिन्दु, **वृत्त का केन्द्र** कहलाता है। अत: वृत्त एक बन्द समतलीय आकृती है।

वृत्त की परिधि : वृत्त का केन्द्र बिन्दु के चारों ओर वक्र रेखा से घिरा होता है । वक्र रेखा की लम्बाई को **वृत्त की परिधि** कहते हैं। वृत्त की **परिधि** (Circumference) कहलाती है इसे C से दर्शाते हैं । अतः,

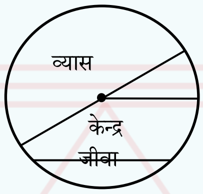
वृत्त की परिधि = $\mathbf{2\,\pi\, r}$

वृत्त की त्रिज्या : वृत्त के केन्द्र से लेकर परिधि तक की दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। वृत्त की त्रिज्या(Radius) को 'r' से दर्शाते हैं।



वृत्त का व्यास - परिधि पर किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाती है वृत्त का व्यास कहलाती है। व्यास(Diameter) को 'D' से दर्शाया जाता है । वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या का दो गुणा होता है ।

- वृत्त पर किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड वृत्त की **जीवा** कहलाती है । वृत्त का व्यास, वृत्त की सबसे बड़ी जीवा होती है ।



उदाहरण : यदि वृत्त की त्रिज्या 5 से.मी. है तो वृत्त की परिधि ज्ञात करें ।

हल : दिया है, वृत्त की त्रिज्या = 5 से.मी.

तब, वृत्त की परिधि $= \mathbf{2\pi r}$

$= 2\pi \times 5$से. मी.

$= 2 \times 5 \times \pi$ से. मी. $= 10\pi$ से. मी.

अतः वृत्त की परिधि 10π से. मी. है।

उदाहरण : यदि वृत्त की त्रिज्या 14 से.मी. है तो वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।

$\left[\text{जहाँ } \pi \text{ का मान } = \frac{22}{7}\right]$

हल : दिया है -वृत्त की त्रिज्या $(r) = 14$ से. मी.

तब, **वृत्त की परिधि** $= \boldsymbol{2\pi r}$

$= 2 \times \pi \times 14$ से. मी. (π का मान रखने पर $\pi = \frac{22}{7}$)

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \quad = \quad 88 \text{ से.मी.}$$

अतः वृत्त की परिधि = 88 से.मी. है।

उदाहरण : यदि वृत्त का व्यास 30 से.मी. है, तो वृत्त की परिधि ज्ञात करें ।

हल : हम जानते हैं - वृत्त की त्रिज्या (r) $= \frac{\text{व्यास } (D)}{2}$

$$= \frac{30 \text{ से.मी.}}{2} \quad = \quad 15 \text{से. मी.}$$

तब, **वृत्त की परिधि** $= 2\pi r$

$$= 2 \times \pi \times 15 \text{ से. मी.} \quad = 30\,\pi \text{ से. मी.}$$

अन्य विधि से , **वृत्त की परिधि** $= \pi \times$ व्यास

$$= \pi \times 30 \text{ से. मी.}$$

$$= 30\,\pi \text{ से. मी.}$$

वृत्त का क्षेत्रफल – वृत्त द्वारा घेरा गया क्षेत्र , वृत्त का क्षेत्रफल कहलाता है। इसे 'A' से दर्शाते हैं। **वृत्त का क्षेत्रफल** $= \pi\, r^2$

उदाहरण : यदि वृत्त की त्रिज्या 5 से.मी. है तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें ।

हल : दिया है, वृत्त की त्रिज्या = 5 से. मी.

हम जानते हैं, **वृत्त का क्षेत्रफल** $= \pi r^2$

$$= \pi (5 \text{ से. मी.})^2$$

$$= 25\,\pi \text{ से. मी.}^2$$

π का मान रखने पर = $\left(\pi = 3.14 \text{ या } \frac{22}{7}\right)$

$$= 3.14 \times 25$$

$$= 78.5 \text{ से. मी.}^2$$

अभ्यास प्रश्नावली - 9

1. आयत का परिमाप एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनकी लम्बाई = 10 से.मी एवं चौड़ाई = 30 से.मी. हो -

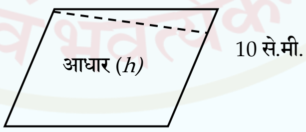
2. यदि एक आयत का क्षेत्रफल 500 $(\text{मीटर})^2$ तथा आयत की लम्बाई 50 मीटर हो, तो चौड़ाई कितने मीटर होगी ?

4. सही-जोड़ी का मिलान कीजिए -

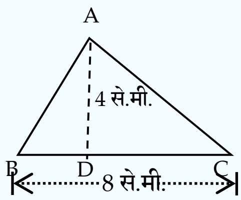
1)	वर्ग का क्षेत्रफल	=	2 × (लम्बाई + चौड़ाई)
2)	आयत का क्षेत्रफल	=	4 × एक भुजा
3)	वर्ग का परिमाप	=	भुजा × भुजा
4)	आयत का परिमाप	=	लम्बाई × चौड़ाई

1. एक समान्तर चतुर्भुज का आधार 7 से.मी. समान्तर भुजाओं की संगत ऊँचाई 8 से.मी. है तब समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $30(\text{से. मी.})^2$ है और आधार 10 से.मी. हो तो ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



4. निम्न आकृति ΔABC में आधार BC = 8 से.मी. व ऊँचाई AD = 4 से.मी. है। ΔABC का क्षेत्रफल



ज्ञात करें।

1. निम्न त्रिज्याओं वाले वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए - $\left(\text{जहाँ } \pi = \frac{22}{7}\right)$

   1) 14 से.मी. 2) 21 मी.

2. यदि एक वृत्ताकार फूलों के बगीचे की त्रिज्या 6 मीटर है, तो क्यारी का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

4. यदि एक वृत्ताकार शीट का व्यास 6 से.मी. है तो शीट की परिधि एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

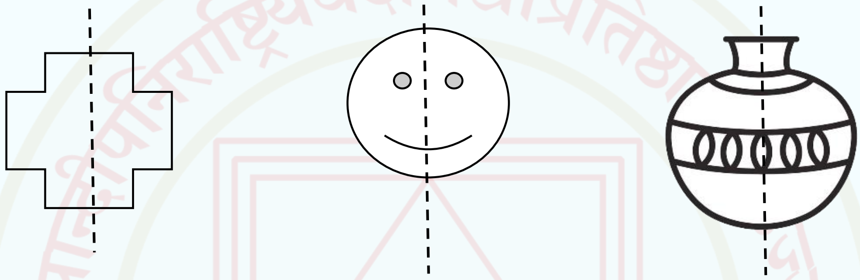
5. एक वृत्ताकार पाइप की त्रिज्या 5 से.मी. है, तो पाइप के चारों और टेप लपेटने की आवश्यक लम्बाई क्या होगी ज्ञात करें ?

अध्याय 10

सममिति

रैखिक सममिति :

नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए -



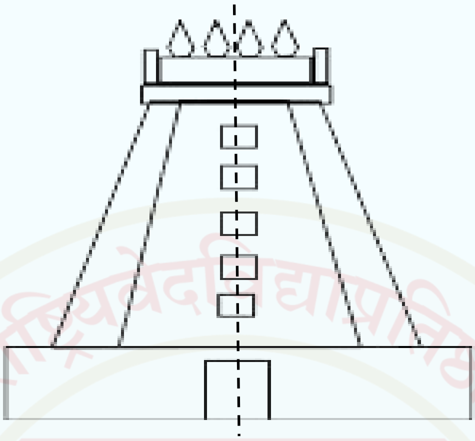
निम्न प्रश्नों का उत्तर अपने साथियों से चर्चा करके जानिए।

1. चित्रों में खींची गई रेखा चित्र को कितने भागों में बाँटती है ?
2. क्या बाँटे गए भाग एक समान हैं ?
3. क्या चित्रों में ऐसी और रेखाएँ खींची जा सकती हैं ? रेखाएँ खींचकर देखिए।

आप देखेंगे कि बिन्दु रेखा चित्र को ठीक दो बराबर भागों में बाँटती है। ऐसी रेखाएँ सममित रेखाएँ कहलाती है। तथा ऐसे चित्र **सममित चित्र** कहलाते हैं।

- सममित रेखा चित्र को एक जैसे भागों में बाँटती है। यह खड़ी, आड़ी अथवा तिरछी भी हो सकती है। सममित रेखा से मोड़ने पर एक भाग दूसरे भाग का पूर्णतः ढ़क लेता है ।

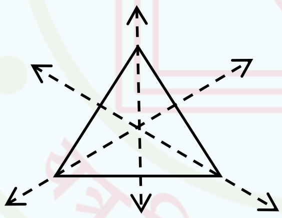
सामान्यतः सममित आकृति, असममित आकृतियों से सुन्दर दिखाई देती है।

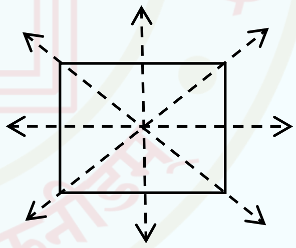


उपर्युक्त मन्दिर का चित्र जो सममिति के कारण से अत्यधिक सुन्दर दिखाई देता है।

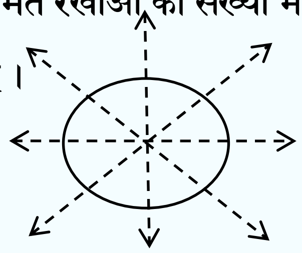
एक से अधिक सममित रेखाएँ -

कई चित्रों (आकृतियों) में एक से अधिक सममित रेखा हो सकती है। नीचे दिए चित्रों में कितनी सममित रेखा बनाई जा सकती है।

1) 

2) 

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि एक चित्र में एक से अधिक सममित रेखाएँ हो सकती हैं। रोचक बात यह है कि सम त्रिभुज में तीन, वर्ग में चार सममित रेखाएँ होती हैं। बहुभुज में भुजाओं के बढ़ने के साथ सममित रेखाओं की संख्या भी बढ़ती है। एक वृत्त में अनन्त सममित रेखाएँ हो सकती है।



➢ **प्रयास करें -**

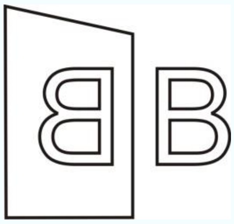
निम्न आकृति में कितनी सममित रेखाएँ खींचि जा सकती है।

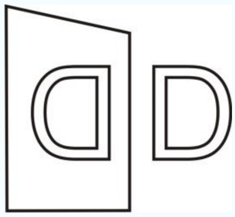
➢ प्रत्येक बहुभुज में उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं, जितनी कि उसमें भुजाएँ **होती हैं।**

समबहुभुज	**समपञ्चभुज**	**वर्ग**	**त्रिभुज**
सममित रेखाओं की संख्या	5	4	3

परावर्तन सममिति

एक समतल दर्पण लीजिए तथा उसके विभिन्न वस्तुओं को बारी-बारी से देखिए। हम वस्तुओं के प्रतिबिम्ब दर्पण में देख सकते हैं। नीचे दिए गए चित्रों को दर्पण में इस प्रकार रखो, कि आधा हिस्सा दर्पण में सामने रखें रहें। हम देखते हैं कि आधा हिस्सा दर्पण के सामने है तथा आधा दर्पण में दोनों हिस्सों से मिलने से चित्र पूरा होता है। यह **परावर्तन सममिति** है। दर्पण में बनने वाले प्रतिबिम्बों को देखिए।





उपर्युक्त चित्रों में दर्पण प्रतिबिम्ब चित्र का आधा भाग है । दर्पण का किनारा सममित अक्ष के रूप में इस प्रकार रैखिक सममिति की अवधारणा परावर्तन के निकट का सम्बन्ध है । दर्पण की रेखा एक सममित रेखा ज्ञात करने में मदद करती है। निम्न चित्रों में B व D का दर्पण परावर्तन दिखाया गया है । उपर्युक्त आकृति के दर्पण परावर्तन में पार्श्व परिवर्तन या अभिमुखों का दायें-बायें परिवर्तन हो जाता है।

- दर्पण परावर्तन में अभिमुखों में दायें-बायें परिवर्तन हो जाता है।

घूर्णन सममिति -

जब घड़ी की सूईयाँ घूमती हैं तो आप क्या समझते हैं? आप समझते हैं कि ये घूर्णन कर रही है ।घड़ी की सूईयाँ केवल एक ही दिशा में घूमती हैं। यह घूमना एक बिन्दु के चारों ओर होता है। घड़ी जिस दिशा में घूमती है। वह घूर्णन (Rotation) **दक्षिणावर्त घूर्णन** (Clock wise) कहलाता है। अन्यथा **घूर्णन वामावर्त** (anticlock wise) कहलाता है।

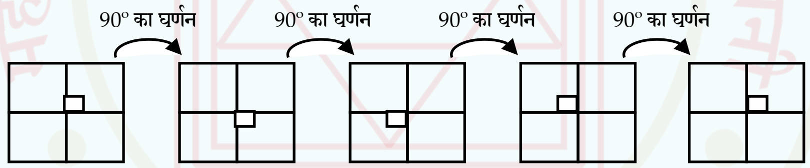
- घूर्णन में एक वस्तु को एक निश्चित बिन्दु के चारों और घुमाया जाता है। निश्चित बिन्दु **घूर्णन का केन्द्र** कहलाता है। जिस कोण पर वस्तु घूमती है, उसे **घूर्णन कोण** कहते हैं।

➢ यदि घूर्णन के बाद वस्तु की स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है, तो हम कहते हैं कि उसमे **घूर्णन सममिति** है।

➢ एक पूरे चक्कर (360°) में कोई वस्तु(आकृति) जितनी बार स्थिति के अनुसार पहले जैसी ही दिखाई देती है वह संख्या उस **घूर्णन सममिति का क्रम** कहलाती है।

➢ आधे या अर्द्ध चक्कर का अर्थ 180° का घूर्णन तथा एक चौथाई चक्कर का अर्थ 90° का घूर्णन है । घूर्णन वामावर्त या दक्षिणावर्त हो सकता है । यदि घूर्णन के बाद वस्तु, स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है,तो हम कहते हैं कि उसमें **घूर्णन सममिति** है ।

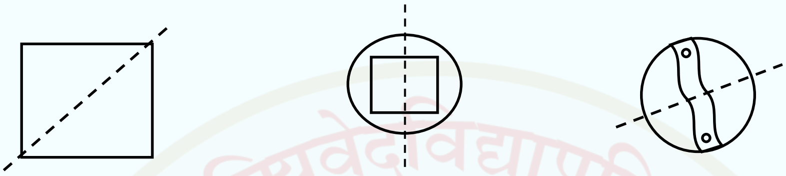
वर्ग का घूर्णन -



वर्ग अपने घूर्णन में चार बार में अपनी प्रारम्भिक अवस्था में आता है। अतः इसका घूर्णन क्रम 4 है तथा प्रत्येक 90° पर वह अपनी पहले वाली अवस्था में आता है। अतः वर्ग का घूर्णन कोण 90° है।

अभ्यास प्रश्नावली - 10

1. नीचे दी गई आकृति में जो बिन्दु रेखा दर्शाई गई है वह आकृति की सममित रेखा है या नहीं, बताइये।

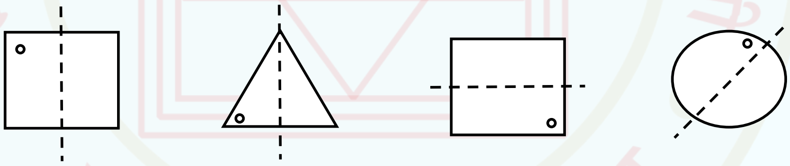


(क) (ख) (ग)

2. नीचे दी गयी आकृति की सममित रेखा खींचिए -

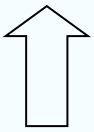
(क) (ख) (ग)

3. नीचे सममित रेखा रेखाएँ दी हुई है। अन्य छेद ज्ञात करें।



(क) (ख) (ग) (घ)

4. निम्न आकृति का घूर्णन क्रम बताइये।



परिशिष्ट

- **भारतीय संख्या पद्धति में संख्याओं के नाम**

इकाई	1
दहाई	10
सैकड़ा	100
हजार	1,000
दस हजार	10,000
लाख	1,00,000
दस लाख	10,00,000
करोड़	1,00,00,000
दस करोड़	10,00,00,000
अरब	1,00,00,00,000
दस अरब	10,00,00,00,000
खरब	1,00,00,00,00,000
दस खरब	10,00,00,00,00,000
नील	1,00,00,00,00,00,000
दस नील	10,00,00,00,00,00,000
पद्म	1,00,00,00,00,00,00,000
दस पद्म	10,00,00,00,00,00,00,000
शंख	1,00,00,00,00,00,00,00,000
दस शंख	10,00,00,00,00,00,00,00,000

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

द्वारा सञ्चालित एवं प्रस्तावित राष्ट्रीय आदर्श वेद विद्यालय

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - ४५६००६ (म.प्र.)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in