गणित
अभ्यास पुस्तिका

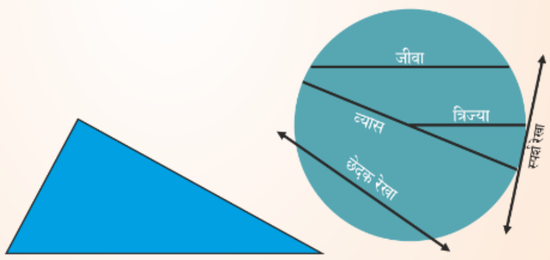
(वैदिक गणित एवं संस्कृत ज्ञान प्रणाली की गणितीय संकल्पनाओं के साथ)

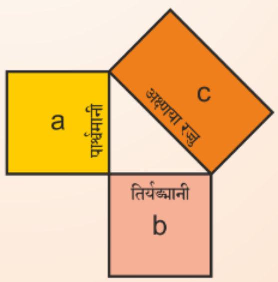
वेद-भूषण - IV वर्ष / पूर्वमध्यमा - I वर्ष / कक्षा नवीं

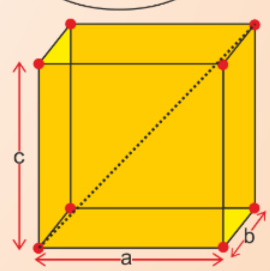
महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेद संस्कृत शिक्षा बोर्ड

(शिक्षा मन्त्रालय भारत सरकार द्वारा स्थापित एवं मान्यता प्राप्त)

प्रमाणं तृतीयेन वर्धयेत्तच्च चतुर्थेनात्मचतुस्त्रिंशोऽनेन सविशेषः ।।
योगं करण्योर्महतीं प्रकल्प्य वधस्य मूलं द्विगुणं लघुं च ।
योगान्तरे रूपवदेतयोः स्तो वर्गेण वर्गं गुणयेद्भजेच्च॥
भाज्याच्छेदः शुद्ध्यति प्रच्युतः सन् स्वेषु स्वेषु स्थानकेषु क्रमेण ।
यैर्यैर्वर्णैः संगुणो यैश्च रूपैर्भागाहारे लब्धयस्ताः स्युरत्र ॥
एकाव्यक्तं शोधयेद् अन्यपक्षाद् रूपाण्यन्यस्येतरस्माच्च पक्षात् ।
शेषाव्यक्तेनो उद्धरेद् रूपशेषं व्यक्तं मानं जायतेऽव्यक्तराशेः।।
अव्यक्तानां द्व्यादिकानामपीह ,यात्तावद् द्व्यादिनिघ्नं हृतं वा।
युक्तोनं वा कल्पयेद् आत्मबुद्ध्या मानं क्वापि व्यक्तमेवं विदित्वा।
तिरश्चीनो विततो रश्मिरेषामधः स्विदासी३दुपरि स्विदासी३त् ।
रेतोधाऽआसन्महिमानऽआसन्त्स्वधाऽअवस्तात्प्रयतिः परस्तात् ॥
दीर्घचतुरश्रस्याक्ष्णयारज्जुः पार्श्वमानी तिर्यङ्मानी च
यत्पृथग् भूते कुरुतस्तदुभयं करोति ।
यो अक्रन्दयत् सलिलं महित्वा योनिं कृत्वा त्रिभुजं शयानः।
वत्स कामदुघो विराजः स गुहा चक्रे तन्वः पराचैः।
सर्वदोर्युतिदलं चतुःस्थितं बाहुभिर्विरहितं च तद्वधात्।
मूलमस्फुटफलं चतुर्भुजे स्पष्टमेवमुदितं त्रिबाहुके।।
क्षेत्रफलं वेधगुणं खाते घनहस्तसंख्या स्यात्।







$\sqrt{\text{तिर्यङ्मानी}^2 (a^2) + \text{पार्श्वमानी}^2 (b^2)}$ = अक्षणया रज्जु (c)

एकाधिकेन पूर्वेण | एकन्यूनेन पूर्वेण | विनुकलम् | विलोकनम् | आनुरूप्येण | बीजाङ्क | निखिलं नवतश्चरमं दशतः

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in

विषयानुक्रमणिका

क. सं.	अध्याय का नाम	पृष्ठ संख्या
1.	संख्या पद्धति	2 – 7
2	बहुपद	8 – 15
3	दो चर वाले रैखिक समीकरण	16 – 20
4	वैदिक गणित	21 – 42
5	वृत्त	43 – 50
6	त्रिभुज की सर्वाङ्गसमता एवं समरूपता	51 – 58
7	बौधायन (पाइथागोरस) प्रमेय	59– 63
8	हीरोन का सूत्र	64 –67
9	क्षेत्रफल एवं आयतन	68 – 76
10	सांख्यिकी	77 – 84
11	प्रायिकता	85 – 88

अध्याय 1

संख्या पद्धति

संख्या रेखा पर संख्या का पुनरावलोकन -

1) प्राकृत संख्या –

1 2 3 4 5 .... + ∞

यहाँ संख्या 1 से दाहिनी ओर बढ़ती है ।

2) पूर्ण संख्या –

0 1 2 3 4 5 .... + ∞

यहाँ संख्या 0 से दाहिनी ओर बढ़ती है ।

3) पूर्णाङ्क संख्या –

-∞……… -3 -2 -1 0 1 2 3 .... + ∞

यहाँ संख्या रेखा 0 के दोनों ओर अनन्त रूप से बढ़ती है ।

परिमेय संख्या -

$-2 \quad -\frac{3}{2} \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2$

वे सभी संख्याएँ जो अंश एवं हर या ($\frac{p}{q}$) के रूप में लिखी जा सके वे सभी संख्याएँ परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं। जहाँ p व q पूर्णाङ्क संख्याएँ है और $q \neq 0$ है । कोई भी परिमेय

संख्या मानक रूप तब कही जाती है, जब उसका हर धनात्मक पूर्णाङ्क हो तथा उसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्वगुणनखण्ड न हो ।**किन्हीं दो परिमेय संख्या के बीच अनन्त परिमेय संख्या होती है।** आगे इस क्रम में हम अपरिमेय संख्या के बारे में अध्ययन करेंगे।   **जैसे** : $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{-17}{23}, \frac{-12}{1}, \frac{-15}{71}, \frac{-71}{15}$

अपरिमेय संख्या – वे संख्याएँ जो परिमेय संख्या नहीं होती हैं, **अपरिमेय संख्या** कहलाती हैं। इन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप नहीं लिखा जा सकता है। p और q पूर्णाङ्क और $q \neq 0$ है। जैसा कि आप जानते हैं कि परिमेय संख्या अनन्त होती है इसी प्रकार अपरिमेय संख्या भी अनन्त होती हैं। **उदाहरण :** $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \pi$, 0.16160016000160000………..

- जब भी प्रतीक ''$\sqrt{\ }$'' (करणी) का प्रयोग करते हैं ।तब हम मानकर चलते हैं कि वह संख्या धनात्मक वर्गमूल अत: $\sqrt{16}= 4$ यद्यपि 4 और - 4 दोनों ही संख्या के 16 के वर्गमूल है।
- अत: संख्या रेखा पर एक साथ ही ली गई संख्या परिमेय एवं अपरिमेय संख्या के समूह को **वास्तविक संख्याओं** का नाम दिया जाता है। इसे `R' से दर्शाया जाता है।

❖ **वास्तविक संख्याएँ एवं उनके दशमलव प्रसार –** वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार पर विचार कर परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं में विभेद् किया जा सकता है।

परिमेय संख्या के दशमलव प्रसार –

अ) परिमेय संख्या जिनका दशमलव प्रसार सांत (Terminating) हो -

परिमेय संख्या जो कि $\frac{p}{q}$ के रूप में हो p को q से भाग देने पर शेष शून्य हो जाता है तो वह सांत दशमलव प्रसार संख्या **परिमेय संख्या** कहलाती है।

उदाहरण : $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{5}{8}$

$\frac{1}{2} = 0.5$ (सांत दशमलव प्रसार)

$\frac{8}{10} = 0.8$ (सांत दशमलव प्रसार)

ब) परिमेय संख्या जिनका दशमलव प्रसार अनवसानी आवर्ती

(Non – Terminating Recurring) -

परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ में p को q से भाग देने पर कुछ चरणों के बाद शेष की पुनरावृत्ति होने लगती है जिससे दशमलव प्रसार निरन्तर जारी रहता है । तो वह अनवसानी आवर्ती (Non – Terminating Recurring) दशमलव प्रसार संख्या **परिमेय संख्या** कहलाती है । **उदाहरण** : $\frac{1}{3}$ = 0.3333............... अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार

$\frac{1}{7}$ = 0.142857142857..अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार

$\frac{1}{3}$ के भागफल में 3 की पुनरावृत्ति को दिखाने के लिए भागफल को $0.\bar{3}$ या 0.3 के रूप में लिखते हैं । इसी तरह $\frac{1}{7}$ के भागफल एक खण्ड 142857 की पुनरावृत्ति होती है उसे दिखाने के लिए भागफल को $0.\overline{142857}$ के रूप में लिखते हैं ।

अपरिमेय संख्या के दशमलव प्रसार – वह संख्या जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है । जहाँ p एवं q एक पूर्णाङ्क हो अथवा वह संख्या जिनका **दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती** (Non – Terminating Non - Recurring) हो **अपरिमेय संख्या** कहलाती है ।**उदाहरणार्थ** : 0.2354....... ,0.0808008000....... , π , 0.16160016000160000.......

वास्तविक संख्या पर सङ्क्रियाएँ (+ , − , × , ÷) -

- समान करणी वाली संख्याओं का अन्तर करने पर योगफल प्राप्त होता है क्योंकि नियम है- **'धनर्णयोरन्तरमेव योगः'** साथ ही जिस करणी संख्या का पूरा-पूरा मूल ना मिलें वह संख्या मूल रूप (मूल करणी) में रखी जाती है ।

उदाहरण : $3\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$ एवं $2\sqrt{5}$ का योगफल ज्ञात करें ।

हल : $3\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

$= 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$

$= (3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) + 3\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$

गुणन -

1) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ (चूँकि $2 = \sqrt{2}.\sqrt{2}$)

2) $3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 9(\sqrt{2} \times \sqrt{2}) = 9 \times 2 = 18$

3) $3\sqrt{2} \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{2 \times 3} = 9\sqrt{6}$

भाग -

उदाहरण: $8\sqrt{15}$ को $3\sqrt{5}$ से भाग दीजिए ।

हल: $8\sqrt{15} \div 3\sqrt{5}$

$= \frac{8\sqrt{15}}{3\sqrt{5}}$

$= \frac{8\sqrt{5}\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

हर का परिमेयकरण : $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ को हर का परिमेयीकरण करने के लिए हम $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ से गुणा करते हैं जहाँ a व b पूर्णाङ्क है ।

उदाहरण : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ को हर का परिमेयकरण कीजिए ।

हल : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ को $(2-\sqrt{3})$ से गुणा करने व भाग देने पर हमे यह प्राप्त होता है ।

$$= \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

या $$= \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}$$

या $$= \frac{2-\sqrt{3}}{4-3}$$

या $$= \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3}$$

हम जानते हैं। कि

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

अभ्यास प्रश्नावली - 1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन कीजिये ।

(अ) निम्न में कौन परिमेय संख्या है -

(I) $\sqrt{2}$ (II) $\sqrt{3}$ (III) $\sqrt{4}$ (IV) $\sqrt{5}$

(ब) निम्न में कौन अपरिमेय संख्या है -

(I) 0 (II) 1 (III) 2 (IV) $\sqrt{2}$

(स) प्रत्येक परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं का समूह .... के अन्तर्गत आता है -

(I) प्राकृत संख्या (II) पूर्ण संख्या (III) पूर्णांक संख्या (IV) वास्तविक संख्या

2. निम्न दशमलव प्रसार वाली संख्याओं से परिमेय संख्या व अपरिमेय संख्या छाँटिए ।

अ) 0.36 ब) 0.3796 स) 0.8225

द) $0.\overline{142857}$ य)   1.10100100010000

प)   1.25   फ)   7.478478

3. निम्न संख्याओं में से परिमेय एवं अपरिमेय संख्या को छाँटिए।

अ) $\sqrt{2}$ ब) $\sqrt{16}$ स) $\sqrt{23}$ द) $\sqrt{25}$

य) $\sqrt{36}$ प) $\sqrt{35}$ फ) $\sqrt{49}$ ज) $\sqrt{50}$

4. निम्न दी गई संख्याओं में से कौन-कौन सी परिमेय संख्या है।

1) $\frac{2\sqrt{7}}{5\sqrt{7}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3) $3\sqrt{3}-\sqrt{3}$ 4) 3π

5. सरल कीजिए।

1) $3\sqrt{5}+2\sqrt{5}$ 2) $4\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ 3) $5\sqrt{3}+8\sqrt{3}$

4) $8\sqrt{3}-5\sqrt{3}$ 5) $7\sqrt{5}-3\sqrt{5}$ 6) $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$

6. निम्नलिखित के हर का परिमेयकरण कीजिए।

1) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

अध्याय 2

बहुपद

बीजीय व्यंजकों का गुणनखण्ड -

जैसे: $y^2 = y \times y$

$x^3y = x \times x \times x \times y$

बीजीय सर्वसमिका और उनके गुणनखण्ड -

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

- अव्यक्त (अज्ञातमान) या चर राशियों की गणना करने के लिए उन की यावत्-तावत्, कालक, नीलक, पीतक और लोहित इत्यादि संज्ञाएँ की है, जिससे सभी अव्यक्त राशियों का पृथ्क-पृथ्क परिज्ञान हो । एक चर राशि को एक सङ्केत यथा x, y, z....... के रूप में व्यक्त किया जाता है ।

बहुपद – एक अचर और चर राशियों का चार मूलभूत सङ्क्रियाओं (+, –,×, ÷) के साथ व्यक्त किया जाता है तो उसे **बीजीय व्यंजक** कहते हैं । बीजीय व्यंजक का सामान्य रूप ax है जिसमें a **अचर** और x **चर** है ।

उदाहरण : $4x, 9x, x^2 + 2, x + 5, x^3 + 4x$.......... आदि ।

➢ बीजीय व्यंजकों में चर x की घाताङ्क पूर्ण संख्या (0, 1, 2, 3.........) में है। इस प्रकार के व्यंजकों को हम **एक चर वाले बहुपद** कहते हैं। बहुपद को P(x) से आदि से प्रकट करते हैं। दूसरे शब्दों में कह सकते हैं कि ''जिस बीजीय व्यंजक में चरों की घात एक पूर्ण (संख्या 0, 1, 2, 3..........) होती है। वह बीजीय व्यंजक **बहुपद** कहलाता है।''

उदाहरण : क्या $x^2 + 2y^5 + 1$ बीजीय व्यंजक है ?

उत्तर : दिये गये बीजीय व्यंजक में चर x व y है यहाँ दोनों चरों का घाताङ्क (2 व 5) पूर्ण संख्या है अत: $x^2 + 2y^5 + 1$ एक बहुपद है।

➢ **जिस बीजीय व्यंजक में चर की घाताङ्क पूर्ण संख्या हो बहुपद कहलाता है।**

जैसे : $x^2 + 2$, $x^2 + y^2 + t^3$, $3x + 5$

वहीं दूसरी तरफ जिस बीजीय व्यंजक में -

1) चर की घाताङ्क ऋणात्मक हो। **जैसे** : – 2, – 5, – 3

2) कोई भी पद जो किसी चर से विभाजित हो यथा $\frac{1}{x}$ **जैसे** : $\frac{1}{3x}$, $3x + \frac{5}{x}$

3) कोई भी भिन्न वाले घाताङ्क जैसे कि $\sqrt{x}$ क्योंकि इसे $x^{\frac{1}{2}}$ तरह लिखा जाता है।

जैसे : $x^2+y^{\frac{1}{2}}$ चर बीजीय व्यंजक में चर y की घाताङ्क $\frac{1}{2}$ (भिन्न संख्या) है अत: $x^2+y^{\frac{1}{2}}$ बहुपद नहीं है।

यदि **किसी बीजीय व्यंजक में चर की घाताङ्क ऋणात्मक या भिन्न संख्या या कोई भी पद जो किसी चर से विभाजित हो तो वह बीजीय व्यंजक बहुपद नहीं होता है।** लेकिन एक बहुपद में अचर, चर या घात हो सकते हैं।

उदाहरण :

अचर (Constants) = $3, 2, -5, \frac{1}{2}$

चर (Variables) = x, xy, xyz, abc

घाताङ्क (exponents) = 0, 1, 2, 3 इत्यादि

बहुपद का घात – यदि बहुपद $P(x)$ है तो चर के बहुपद में x की उच्चतम घात (highest Power) **बहुपद का घात** (Degree of Polynomial) कहलाता है ।

1) जिस बहुपद में चर की उच्चतम घात 1 हो वह बहुपद एक घातीय बहुपद या **रैखिक बहुपद** कहलाता है । **जैसे** : $3x, 4x + 1, 1 + 5x$

2) जिस बहुपद में चर की उच्चतम घात 2 हो वह बहुपद **द्विघात बहुपद** कहलाता है ।
जैसे : $x^2 + x + 2, 2x^2 + 1, 3 + 3t^2$

3) जिस बहुपद में चर की घात तीन हो वह बहुपद **त्रिघात बहुपद** कहलाता है ।
जैसे : $3x^3 + 3x, 3x^3 + x^2 + 2x + 1, 4x^3$

4) अचर बहुपद **शून्य बहुपद** कहलाता है दूसरे शब्दों में शून्य बहुपद की अधिकतम घात शून्य होती है । **जैसे** : $3x^0 + 1, 4, -5y^0$ (चूँकि $x^0 = 1$)

सोचिए : 1) क्या $4x^0 + 1$ भी एक बहुपद है । (हाँ / नहीं)

उदाहरण : नीचे दिए गए बीजीय व्यंजक बहुपद हैं या नहीं यदि हैं तो बहुपद के पदों की संख्या एवं बहुपद की घात बताइये ।

1). $3x^4 + 2x^2 + 1$ **2).** $3x^2 + 2\sqrt{x} + 1$

हल 1) : $3x^4 + 2x^2 + 1$

दिया है - $3x^4 + 2x^2 + 1$ बीजीय व्यंजक एक बहुपद है ।

बहुपद में पदों की संख्या = 3 $(3x^4, 2x^2, 1)$

बहुपद की घात 4 है ।

हल 2) : $3x^2 + 2\sqrt{x} + 1$

दिया है $3x^2 + 2\sqrt{x} + 1$ बीजीय व्यंजक बहुपद नहीं है क्योंकि यहाँ 2 का गुणांक $\sqrt{x}$ है अर्थात् $x^{½}$ चर कि घात एक एक भिन्न संख्या (1/2) है । इसलिए यह बहुपद नहीं है ।

बहुपद के शून्यक - किसी बहुपद में चर के स्थान पर ऐसा मान रखें जिसमें बहुपद का मान शून्य प्राप्त हो। बहुपद का वह मान **शून्यक** कहलाता है । एक वास्तविक संख्या k बहुपद p(x) का शून्यक कहलाती है । यदि P(k) = 0 है ।

उदाहरण : 3 अथवा – 3 के बहुपद p(y) = 2y – 6 के शून्यक होने की जाँच कीजिए ।

हल : $p(y) = 2y - 6$

y = 3 रखने पर $p(3) = 2(3) - 6 = 6 - 6 = 0$

y = – 3 रखने पर $p(-3) = 2(-3) - 6 = -6 - 6 = -12$

अत: 3 बहुपद p(y) = 2y – 6 का शून्यक है जबकि – 3 नहीं ।

बहुपद में पद का गुणांक :

उदाहरण : यदि x = 5 के लिए बहुपद $4x^2+3$ का मान होगा -

हल: दिया है बहुपद $4x^2+3$

यदि x = 5 हो तब,

$P(x) = 4x^2+3$

$$P(x) = 4\,(5)^2 + 3$$

$$P(x) = 4 \times 25 + 3$$

$$P(x) = 100+3 = 103$$

अत: x = 5 होने पर बहुपद $4x^2+3$ का मान 103 होगा।

शेषफल प्रमेय –

आइए, दो संख्याओं 16 व 3 को लीजिए आप जानते हैं 16 को 3 से भाग देने पर 5 भागफल एवं 1 शेषफल आएगा। हम जानते हैं,

भाज्य	**=**	**भाजक ×भागफल + शेषफल**
16	=	$3 \times 5 + 1$
16	=	$15 + 1$
16	=	16

भाजक भाज्य भागफल

3) 16 (5

– 15

01 (शेषफल)

हम यहाँ देखते हैं कि 1 शेषफल है।

- बीजगणित में बहुपदी शेषफल प्रमेय,बहुपदी दीर्घ विभाजन का एक अनुप्रयोग है।।

उदाहरण: यदि दो बहुपद p(x) और g(x) है तो p(x) को g(x) से भाग दीजिए।

$$p(x) = 5x^2 + 7x + 3 \;, \quad g(x) = x + 1$$

हल : $p(x) \div g(x)$

$$= (5x^2 + 7x + 3) \div (x + 1)$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 5x + 2 \\
\hline
x + 1 & 5x^2 + 7x + 3 \\
 & \underline{-5x^2 \underset{-}{+} 5x} \\
 & \qquad\quad 2x + 3 \\
 & \qquad\quad \underline{-2x \underset{-}{+} 2} \\
 & \qquad\qquad\quad 1
\end{array}
$$

भागफल : $5x + 2$

शेषफल : 1

उपर्युक्त दिया गया भाग निम्न चरणों में पूर्ण हुआ है ।

चरण I : भाज्य के प्रथम पद को भाजक के प्रथम पद से भाग देने पर अर्थात् $5x^2$ को x भाग देकर $5x$ प्राप्त होता है ।

चरण II : भाजक को भागफल के प्रथम पद $5x$ से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल $5x^2 + 5x$ को भाज्य में से घटाया । इस प्रकार $2x + 3$ प्राप्त हुआ ।

चरण III : शेषफल $2x + 3$ को नया भाज्य मानकर पुनः **चरण** (I) की प्रक्रिया अपनाई इस प्रकार भागफल का दूसरा पद 2 प्राप्त हुआ ।

चरण IV : **चरण** (II)की तरह भागफल के दूसरे पद को भाजक $(x + 1)$ से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल $2x + 2$ को भाज्य $2x + 3$ से घटाया इससे शेषफल 1 प्राप्त हुआ ।

यह प्रक्रिया हम तब तक दोहराते हैं जब तक कि भाज्य की घात, भाजक की घात से छोटी (न्यून) नहीं हो जाती है । अन्तिम चरण में भाज्य शेषफल बन जाता है और भागफलों के योग से पूर्ण भागफल बन जाता है ।

अभ्यास प्रश्नावली – 2

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन कीजिये ।

(अ) निम्न में कौन रैखिक बहुपद है -

(I) x^2 (II) $7x^3$ (III) x-x^3 (IV) x+1

(ब) निम्न में कौन-सा द्विघाती बहुपद है -

(I) x - x^3 (II) 1 + x (III) y+y^2+1 (IV) 3t

(स) निम्न में कौन-सा त्रिघाती बहुपद है -

(I) x^2 (II) x+1 (III) $7x^3$ (IV) $\frac{1}{x^3}$

(द) बहुपद $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ में x^2 का गुणांक है-

(I) π (II) $\frac{\pi}{2}$ (III) 2 π (IV) $\frac{1}{2}$

(प) $x = -1$ के लिए बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ का मान होगा -

(I) 0 (II) 1 (III) -5 (IV) -6

(फ) $p(x) = x + 5$ के शून्यक है -

(I) 5 (II) -5 (III) 1 (IV) -1

2. निम्नलिखित बहुपदों की घात क्या है ?

(1) $10x^{10} + 10$ (2) $5x^7 + 5x^6 + 1$ (3) $3x^2 + 2$

(4) $5x^2$ (5) $10y^3 + y + 1$ (6) $10x^9$ (7) 14

3. निम्नलिखित पर बहुपद $(3x^2 + 2x + 1)$ के मान ज्ञात कीजिए ।

अ) x = 2 ब) x = 1 स) x = 0

4. 3 अथवा (– 3) के बहुपद $P\ (x)\ =\ x^2 +\ 9$ के शून्यक होने की जाँच कीजिए ।

5. बहुपद $(2x^2 + 3x\ +\ 1)$ को निम्नलिखित से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

अ) (x + 1) ब) (x + 2) स) (x – 1) द) (x – 2)

6. बहुपद $(5x^4 +\ 4x^2\ +\ 3x\ +\ 1)$ को $(x\ +\ 1)$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए ।

अध्याय 3

दो चर वाले रैखिक समीकरण

- **ऐसी राशि जिसका मान परिवर्तित होता(बदलता) रहता है, चर राशि कहलाती है ।**

  चर राशियों को हम x , y , z…….. इत्यादि से दर्शाते हैं।

- एक चर वाले रैखिक समीकरण में चर की घात 1 हो तो उसे **रैखिक समीकरण** कहते हैं। **जैसे**: किसी संख्या में 3 जोड़ने पर दस (10) प्राप्त होता है । तो वह अज्ञात संख्या ज्ञात कीजिए ।

$$x + 3 = 10$$

- एक चर वाले रैखिक समीकरण का एक अद्वितीय (एक और केवल एक) हल होता है इसे समीकरण का मूल कहते हैं । एक चर वाले समीकरण को व्यापक रूप से $ax + b = 0$ के रूप में दर्शाते हैं । जहाँ a व b वास्तविक संख्या है और a शून्य नहीं है ।

- **दो चर वाले रैखिक समीकरण**

ऐसे समीकरण जिसमें दो अज्ञात राशि (चर) हो तथा प्रत्येक चरों की घाताङ्क एक (1) हो तो इसे **दो चर वाले रैखिक समीकरण** कहते हैं ।

आपको याद होगा -

शुभम : x^2 का घातांक 2 है इसे हम x की घात 2 पढ़ेंगे।

तथा x^1 या x में की घातांक 1 है।

दो चर वाले रैखिक समीकरण के कुछ उदाहरण निम्न हैं ।

1) $3x + 4y = 5$ 2) $3m + 5n = 9$

क्या आप कुछ उदाहरण दे सकते हैं ? ध्यान दीजिए कि आप इन समीकरणों को क्रमशः

$2p + q - 1 = 0$ और $A + 3B - 6 = 0$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं ।

दो चर वाली रैखिक समीकरण को व्यापक रूप को $ax + by + c = 0$ के रूप में दर्शाते हैं।

जहाँ a, b व c वास्तविक संख्या है । a और b दोनों शून्य नहीं हैं $(a \neq 0, b \neq 0)$ तथा चर x एवं y कि घात 1 है । **दो चरों वाला रैखिक समीकरण** कहा जाता है ।

उदाहरण : निम्न समीकरण से a , b व c का मान करें ।

1) $2x + 3y - 5 = 0$

हल: दिये गये समीकरण $2x + 3y - 5 = 0$ की तुलना दो चर वाले रैखिक समीकरण के व्यापक रूप **$ax + by + c = 0$** से तुलना करने पर -

यहाँ $a = 2, b = 3, c = -5$ है, जो कि वास्तविक संख्याएँ हैं ।

2) $\sqrt{3}x - 4y = -5$

हल: दिया है : $\sqrt{3}x - 4y = -5$

या $\sqrt{3}x - 4y + 5 = 0$

दिये गये समीकरण $\sqrt{3}x - 4y + 5 = 0$ की तुलना दो चर वाले रैखिक समीकरण के व्यापक रूप **$ax + by + c = 0$** से तुलना करने पर -

यहाँ $a = \sqrt{3}, b = -4$ और $c = 5$ है ।

निम्न कथन को दो चरों वाली रैखिक समीकरण के रूप लिखिए।

कथन: एक किताब की कीमत और10 पेन्सिल की कीमत 50 रुपये हैं।

मान लीजिए,किताब की कीमत x एवं पेन्सिलों की y है तो कथनानुसार समीकरण,

(किताब की कीमत) + 10 (पेन्सिल की कीमत) = 50

अत: $x + 10y = 50$

रैखिक समीकरण का हल –

एक समीकरण को हल करने पर निम्न बातों का ध्यान रखें।एक रैखिक समीकरण पर तब तक कोई प्रभाव नहीं होता जब तक कि-

1. रैखिक समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या को जोड़ा या घटाया जाए।
2. रैखिक समीकरण के दोनों पक्षों में समान शुन्येतर संख्या से गुणा या भाग किया जाए।

आइए, उदाहरण के माध्यम से सीखते हैं।

उदाहरण : समीकरण $x + y = 10$ निम्नलिखित में से कौन-सा क्रमित युग्म समीकरण को सत्यापित (सन्तुष्ट) करता है।

(1) $(3, 7)$ (2) $(1, 9)$

हल 1): $(3, 7)$

समीकरण $x + y = 10$

क्रमित युग्म $(3, 7)$ में x का मान 3 एवं y का मान 7 समीकरण में रखने पर

$$3 + 7 = 10$$

$$10 = 10$$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अत: क्रमित युग्म (3 , 7) दिये गये समीकरण का हल है क्योंकि हम जानते हैं समीकरण में बायाँ पक्ष व दायाँ पक्ष का समान होता है ।

हल 2): (1 , 9)

समीकरण $x + y = 10$

क्रमित युग्म (1 , 9) **में** x **का मान** 1 **व** y **का मान** 9 **समीकरण में रखने पर**

$$1 + 9 = 10$$

$$10 = 10$$

अत: क्रमित युग्म (1, 9) दिये गये समीकरण $x + y = 10$ का हल है ।

- दो चरों वाले रैखिक समीकरण के विभिन्न हल हो सकते हैं । इसका अर्थ है कि **दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं ।**

अभ्यास प्रश्नावली - 1

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प का चयन कीजिये।

(अ) निम्न में से कौन-सा दो चर वाले रैखिक समीकरण है -

(I) $2x + 5 = 0$ (II) $x + y = 1$ (III) $y = 2$ (IV) $2x = 3$

(ब) निम्न में से कौन-सा दो चर वाले रैखिक समीकरण है -

(I) $2x = 3$ (II) $y = 2$ (III) $x = 3y$ (IV) $x = -5$

(प) $x + 2y = 6$ का हल है -

(I) (2,2) (II) (0,2) (III) (2,0) (IV) (-2, -2)

(फ) $y = x + 2$ का हल नहीं है -

(I) (0,2) (II) (1,3) (III) (-2,0) (IV) (2, 3)

2. दो बॉल और एक बैट की कीमत 200 रु. है, तो दिये गये कथन का दो चर वाला रैखिक समीकरण लिखिए।

3. निम्नलिखित रैखिक समीकरणों को **$ax + by + c = 0$** के रूप में करते हुए a, b और c का मान बताइए।

1) $5x + 6y = 18$ 2) $7x + 8y + 9 = 0$

3. K का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x = 30$ या $y = 70$ समीकरण $x + y = K$ का एक हल हो।

4. K का मान ज्ञात कीजिए जबकि $m = 15$ व $n = 15$ समीकरण $m + n = K$ का एक हल हो।

अध्याय 4

वैदिक गणित

वैदिक गणित के सूत्रों एवं उपसूत्रों की सूची –

सूत्र –

1) एकाधिकेन पूर्वेण – पूर्व से एक अधिक द्वारा

2) निखिलं नवतश्चरमं दशत: - सभी नौ से अन्तिम दस से

3) ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् – आड़ा और तिरछा

4) परावर्त्य योजयेत् – विलोम का प्रयोग करें

5) शून्यं साम्यसमुच्चये – समुच्चय समान होने पर शून्य होता हैं ।

6) आनुरूप्ये शून्यमन्यत् – यदि एक अनुपात में है, तो दूसरा शून्य होगा ।

7) सङ्कलन-व्यवकलानाभ्याम् – जोड़ने एवं घटाने से

8) पूरणापूरणाभ्याम् – पूर्ण एवं अपूर्ण से

9) चलनकलनाभ्याम् – युगपत् गति

10) यावदूनम् – जितना कम हो

11) व्यष्टिसमष्टि: – समग्र एक ही तरह और एक समग्र की तरह

12) शेषाण्यङ्केन चरमेण – शेष को अन्तिम अङ्क से

13) सोपान्त्यद्वयमन्त्यम् – अन्त के साथ उपान्त को दोगुणा जोड़कर

14) एकन्यूनेन पूर्वेण – पूर्व से एक कम द्वारा

15) गुणितसमुच्चयः - गुणनफल की गुणन संख्याओं का योग

16) गुणकसमुच्चयः - गुणनखण्डों का समुच्चय

वैदिक उप-सूत्र –

1) आनुरूप्येण – अनुपात से

2) शिष्यते शेषसंज्ञः – शेष से शेष ज्ञात करना

3) आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन – पहले को पहले से और अन्तिम को अन्तिम से

4) केवलैः सप्तकं गुण्यात् – केवल सात के गुणज

5) वेष्टनम् – आश्लेषण (विभाजनीयता परीक्षण की विशिष्ट क्रिया का नाम)

6) यावदूनं तावदूनम – जितना कम हो, उतना और कम करें

7) यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत् – जितना कम हो, उसका दोगुणा कम करके वर्ग प्रयोग करें ।

8) अन्त्ययोर्दशकेऽपि – जब अन्तिम अङ्कों का योग दस हो ।

9) अन्त्ययोरेव – केवल अन्तिम को ही

10) समुच्चयगुणितः - समुच्चयों का गुणनफल

11) लोपनस्थापनाभ्याम् – लोपन और स्थापना से

12) विलोकनम् – देखकर

13) गुणितसमुच्चय: समुच्चयगुणित: - गुणनफल का समुच्चय, समुच्चय का गुणनफल होता है।

14) द्वन्द्वयोग: – द्वन्द्व योग

15) शुद्ध: - बिन्दु

16) ध्वजाङ्क: – भाजक के इकाई का अङ्क

विशेष सूत्रों के अर्थ एवं अनुप्रयोग

1) **एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र –**

इस सूत्र का अर्थ है ‘ **पिछले से एक अधिक** ’ किसी संख्या का एकाधिक करना हो,तो उसमें एक जोड़ना अथवा इकाई अङ्क पर एकाधिकेन का चिह्न(.) लगाना।

जैसे- 134 में 3 का एकाधिक करने पर = $1\dot{3}4$ = 144

6525 में 2 का एकाधिकेन करने पर = $65\dot{2}5$ = 6535

अनुप्रयोग –

1) **योग सङ्क्रिया (जोड़ने) –**

विधि – प्रश्न में दी गई संख्याओं को स्तम्भ रचना में ऊपर से नीचे लिखिए इकाई स्तम्भ में ऊपर से नीचे जोड़ना प्रारम्भ कीजिए । जिस अङ्क का योग दस या दस से अधिक हो जाए उस अङ्क के पूर्व अङ्क में एकाधिक का चिह्न लगायें इस क्रिया की आवृत्ति कीजिए अन्त में जो शेष रहे उस अङ्क को उत्तर के स्थान में नीचे लिखिए इस प्रकार अन्य स्तम्भों का योग कीजिए।

उदाहरण : योग कीजिए ।

हल :

$$\begin{array}{r} 37383 \\ \dot{1}5\dot{2}\dot{2}8 \\ 3\dot{4}581 \\ +\ \dot{2}3\dot{7}73 \\ \hline \boxed{110965} \end{array}$$

सङ्केत –

1) प्रथम स्तम्भ में 3 + 8 = 11 अत: 8 के पूर्व अंक 2 पर एकाधिक का चिह्न लगायें ।
2) 11 के इकाई अंक 1 + 1 = 2
3) 2 + 3 = 5 को उत्तर में नीचे के स्थान पर लिखें ।

व्यवकलन सक्रिया (अन्तर) –

वैदिक गणित में व्यवकलन की सङ्क्रिया के चार-पाँच विधियों में सबसे श्रेष्ठ एवं सरल विधि (एकाधिकेन सूत्र + परममित्र) आधारित विधि है।

परममित्र अङ्क –

जिन दो अङ्कों का योग 10 हो, वे एक-दूसरे के **परममित्र अङ्क** कहलाते हैं ।

जैसे : 7 का परममित्र अङ्क = 3 , 6 का परममित्र अङ्क = 4

$\dot{2}$ (यानि की 3) का परममित्र अङ्क = 7

विधि – जब ऊपर वाले अङ्क (वियोज्य) में से नीचे वाला अङ्क (वियोजक) नहीं घटता है, तब नीचे वाले अङ्क का परममित्र अङ्क ऊपर वाले अङ्क जोड़कर योगफल नीचे (उत्तर में) लिख दिया जाता है और नीचे वाले अङ्क के पूर्व अङ्क में एकाधिकेन का चिह्न लगा दिया जाता है । इस क्रिया की आवृत्ति से उत्तर (शेषफल) ज्ञात हो जायेगा ।

उदाहरण : निम्न को घटाइये -

हल :

$$
\begin{array}{r}
5\ 2\ 1\ 2\ 4 \\
-\ \dot{2}\ 7\ \dot{2}\ 7\ 1 \\
\hline
\boxed{2\ 4\ 8\ 5\ 3}
\end{array}
$$

सङ्केत –

1) 4 – 1 = 3 नीचे उत्तर के स्थान में लिखें।

2) 2 मे 7 नहीं घटता अत: 7 का परममित्र अंक 3 को जोड़ 2 में तथा योग 5 लिखा नीचे उत्तर के स्थान पर साथ ही 7 के पूर्व अंक 2 पर एकाधिकेन चिह्न इसी प्रकार घटाने की क्रिया पूरी कीजिए।

उदाहरण : व्यवकलन (अन्तर) कीजिए।

हल:

	घ.	मि.	से.
	34	32	15
-	$\dot{1}5$	$\dot{2}\dot{4}$	32
	19	07	43

सङ्केत –

1) मापन इकाई समय के स्तम्भ आधार भिन्न-भिन्न

2) मिनट व सेकेण्ड के स्तम्भ में दो आधार रहेंगे।

3) दोनों के इकाई स्तम्भ में आधार = 10

4) दोनों के दहाई स्तम्भ में आधार = 6

5) घण्टे के स्तम्भ में आधार = 10

6) मिनट एवं सेकेण्ड के दहाई स्तम्भ में परममित्र अङ्क निकालने का आधार= 6 रहेगा तथा शेष में आधार =10 रहेगा।

गुणन सङ्क्रिया (गुणा) –

अन्त्ययोर्दशकेऽपि सूत्र के अन्तर्गत एकाधिकेन का प्रयोग कर गुणन करते हैं ।

- गुणा करने में इस सूत्र का सीमित प्रयोग है । यह वही काम करता है जहाँ गुण्य और गुणक के इकाई के अङ्कों का योग 10 हो तथा शेष अङ्क समान हो, परिणाम दो भागों में प्राप्त होता है ।
- **दायाँ पक्ष -** इकाई के अङ्कों को गुणा करें और गुणनफल लिखें ।
- **बायाँ पक्ष** - (दहाई या इकाई के शेष अङ्क) × (दहाई या इकाई के शेष अङ्क+ 1) का गुणनफल लिखें ।

उदाहरण : 24 को 26 से गुणा करें ।

हल :

$$\begin{array}{r} 2\,4 \\ \times \quad 2\,6 \\ \hline \boxed{6\,2\,4} \end{array}$$

सङ्केत -

1) यहाँ इकाई के अङ्कों का योग 4 + 6 = 10 है ।
2) गुण्य व गुणक के दहाई के अङ्क समान हैं।
   4 × 6= 24 को दायें पक्ष में लिखें ।
3) 2 × (2 का एकाधिकेन)
   2 × 3 = 6 को बायें पक्ष में लिखें।

उदाहरण : गुणा कीजिए । (सूत्र एकाधिकेन के प्रयोग से)

हल : $3\frac{5}{6} \times 3\frac{5}{6}$

$= 3 \times 4 \,/\, \frac{5}{6} + \frac{5}{6}$

$= 12 \,/\, \frac{10}{6}$

$= 12\frac{10}{6}$

सङ्केत -

1) भिन्न का योगफल
   $\frac{5}{6} + \frac{5}{6} = \frac{5+5}{6} = \frac{10}{6}$
2) शेष आगे का अङ्क (निखिलम् अङ्क) = 3
   = 3 × (3 का एकाधिकेन)

एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र - सूत्र दो शब्द 'एकन्यूनेन' तथा 'पूर्वेण ' से बना है । सूत्र का अर्थ है- **''पहले के अङ्क का एकन्यून (कम) होने की क्रिया के द्वारा ''** जिस अङ्क का एकन्यून करना है उसके इकाई के अङ्क के नीचे एक बिन्दु (·) लगा दीजिए । यह बिन्दु **एकन्यून चिह्न** कहलाता है।

जैसे : 7 का एकन्यूनेन $= \underset{\cdot}{7} = 6$

व्यवकलन विधि –यदि वियोज्य अङ्क में से वियोजक का अङ्क नहीं घटता है, तो वियोजक अङ्क का परममित्र अङ्क वियोज्य अङ्क में जोड़कर योगफल को नीचे के स्थान पर लिख दीजिए इसके साथ-साथ वियोजक के पूर्व अङ्क के नीचे एक बिन्दु लगा दीजिए , यह बिन्दु एक न्यून चिह्न कहलाता है । इस क्रिया की आवृत्ति से अन्त शेषफल (उत्तर) ज्ञात हो जायेगा ।

उदाहरण : निम्न को घटाइये (एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र से)

हल :

$$\begin{array}{rccc} & \underset{\cdot}{5} & \underset{\cdot}{6} & 0 \rightarrow \text{वियोज्य} \\ - & 3 & 7 & 5 \rightarrow \text{वियोजक} \\ \hline & \boxed{1\ \ 8\ \ 5} & & \rightarrow \text{शेषफल} \end{array}$$

सङ्केत –

1) सम्पूर्ण क्रिया सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण पर आधारित विधि के समान है ।
2) अन्तर इतना है कि इस क्रिया में एकाधिक चिह्न के स्थान एक न्यूनेन का चिह्न वियोज्य के अङ्क के पूर्व अङ्क के नीचे लगेगा ।

गुणन सङ्क्रिया – एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र के प्रयोग से

एक न्यूनेन पूर्वेण दो संख्याओं के गुणन में जब एक संख्या का प्रत्येक अङ्क 9 हो, तो गुणा करने की इस अद्भुत विधि का प्रयोग किया जाता है । **विधि** – गुणनफल के दो पक्ष होते हैं ।

बायाँ पक्ष = गुण्य – 1

दायाँ पक्ष = गुणक – बायाँ पक्ष

अत: गुण्य × गुणक = गुण्य – 1 / गुणक – बायाँ पक्ष

यह सूत्र तीन परिस्थितियों में काम करता है ।

1) **प्रथम स्थिति : (गुणक अङ्क संख्या = गुण्य अङ्क संख्या)**

देखिए निम्न उदाहरण

उदाहरण : गुणन करें- 8×9

हल: बायाँ पक्ष $= 8 - 1 = 7$

दायाँ पक्ष $= 9 - 7 = 2$

अत: $8 \times 9 = 8 - 1 / 9 - 7$

$= 7 / 2$

$= 72$

उदाहरण : गुणन करें 345×999

हल : $345 \times 999 = 345 - 1 / 999 - 344$

$= 344 / 655$

$= 344655$

2) द्वितीय स्थिति : गुणक अङ्क संख्या > गुण्य अङ्क संख्या

उदाहरण : गुणन करें- 34×999

हल: 34×999

$= 034 - 1 \;/\; 999 - 033$

$= 33 \;/\; 966$

$= 33966$

उदाहरण : गुणन करें- 254×99999

हल : 254×99999

$= 254 - 1 \;/\; 99999 - 00253$

$= 253 \;/\; 99746$

$= 25399746$

ध्यान रखें –

1) गुणक संख्या के जितने अङ्क गुण्य संख्या से अधिक होते हैं उतने ही 9 के अङ्क गुणनफल के मध्य होते हैं ।

2) शेष वाम पक्ष और दाहिने पक्ष के क्रमानुसार अङ्कों का योग 9 होता है अर्थात् वाम पक्ष प्रथम अङ्क + दायाँ पक्ष का अङ्क = 9

3) तृतीय स्थिति : (गुणक अङ्क संख्या < गुण्य अङ्क संख्या)

अन्य विधि: जब गुण्य अङ्क में 9 की संख्या ,गुणक की संख्या से कम हो तो जितने 9 अङ्क गुण्य में हो उतने शून्य गुणक में लगाकर दिये हुए गुणक को घटा दिया जाता है।तो प्राप्त संख्या का गुणनफल प्राप्त होता है।

उदाहरण: गुणन करें- 312×99

हल:

$$\begin{array}{r} 31200 \\ -\ 312 \\ \hline \boxed{=\ 30888} \end{array}$$

स्मरणीय बिन्दु :

- **विनकुलम् (ऋणात्मक) संख्या -** विनकुलम् प्रयोग की सङ्कल्पना वैदिक गणित की देन है । विनकुलम् प्रयोग से गणनाएँ छोटी एवं सरल तथा कभी-कभी मौखिक भी हो जाती है । इसका प्रयोग 5 से बड़े अङ्क (6, 7, 8, 9) वाली संख्या को छोटे अङ्क (0, 1, 2, 3, 4, 5) में बदली जाती है । जिससे गणना आसान हो जाती है ।

जैसे : $\bar{1}\,\bar{2}, \bar{5}, \bar{7}$अङ्कों के ऊपर छोटी सी रेखा विनकुलम् (–)चिह्न है ।

- **बीजाङ्क (आङ्किक योग) :**

किसी संख्या के अङ्कों का योग उस संख्या का बीजाङ्क(आङ्किक योग) कहलाता है। यह बीजाङ्क केवल एक ही अङ्क का हो सकता है और यदि एक से अधिक अङ्क का हो तो उन अङ्कों को फिर से जोड़कर एक-एक अङ्क का बना लिया जाता है।

(75 का आङ्किक योग 7+5= 12, किन्तु दो अङ्क हैं इसलिए 1+2=3)

बीजाङ्क ज्ञात करते समय '9' को 0 के समतुल्य माना जाता है. क्यों?

उदाहरण: 531 का बीजाङ्क होगा   5+3+1 = 9.

172654 का बीजाङ्क होगा 1+7+2+6+5+4 = 25 और 25 से 2+5 = 7.

- **आधार** – गणनाओं को सरल बनाने के लिए वैदिक गणित में 10, 100, 1000 या 10 की घात को **आधार** माना जाता है ।

ध्यान रहे – आधार में जितने शून्य होते हैं । उतने ही अङ्क गुणनफल में दाहिने पक्ष में रखते हैं । अङ्क संख्या की कमी होने पर 0 मिलकर पूरी संख्या लिखते हैं ।यदि दाहिने पक्ष में अङ्क अधिक तो बायें पक्ष में अङ्क जोड़ते हैं ।

जैसे : आधार संख्या 10 में दाहिने तरफ 1 अङ्क, आधार संख्या 100 में दाहिने तरफ 2 अङ्क, आधार संख्या 1000 में दाहिने तरफ 3 अङ्क लिखते हैं ।

- **उपाधार – उपाधार** आधार संख्या का गुणज होता है अधिकतर यह शून्यान्त संख्या होती है । यदि आधार संख्या 10 की गुणज हो (20, 30, 40, 50, 60, 70…………) या आधार संख्या 100 की गुणज (200, 300, 400…………………..) इत्यादि ।

यदि आपका आधार = 10 तो उपाधार = $10 \times a$ यहाँ,a एक पूर्ण संख्या है।

जैसे: आधार = 20 = 10×2

तब, आधार = 10 और उपाधार = 2 है ।

- **विचलन** – दी गई संख्या में से आधार घटा दिया जाए , तो शेषफल **विचलन** कहलाता है । **विचलन = संख्या – आधार**

जैसे :

जब आधार 10 हो ।	जब आधार 100 हो ।
18 का विचलन = 10 + 8 = +8	102 का विचलन = 102 – 100 = +2
8 का विचलन = 8 – 10 = –2	93 का विचलन = 93 – 100 = – 3
12 का विचलन = _________	92 का विचलन = _________

यदि संख्या आधार संख्या से बड़ी हो तो **विचलन धनात्मक** होता है । यदि संख्या आधार संख्या से छोटी हो तो **विचलन ऋणात्मक** होता है ।

निखिलम् नवत: चरमं दशत: सूत्र - इस सूत्र का तात्पर्य **'सभी नौ से और अन्तिम दस'** से है। प्राचीन भारतीय गणित में 9 को ब्रह्म अङ्क तथा 10 को पूर्ण अङ्क कहते हैं । यह सूत्र विनकुलम्, व्यवकलन (अन्तर), गुणन एवं भाग से सम्बन्धित अनेकों स्थिति में प्रयोग किया जाता है। **अनुप्रयोग –**

1) सामान्य संख्याओं को विनकुलम् संख्या में बदलने के नियम(एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र + निखिलम् सूत्र)

जब सामान्य संख्या 5 या 5 से अधिक से बड़ा हो तो निखिलम् सूत्र से उसे विनकुलम् संख्या में बदला जा सकता है ।

विधि – 1) संख्या के इकाई अङ्क को 10 से घटाइये ।

2) संख्या के शेष अङ्क का 9 से घटाइये ।

3) शेषफल के प्रत्येक अङ्क पर विनकुलम् रेखा खींचिए ।

4) शेषफल के पूर्व अङ्क 0 अथवा 5 से छोटे अङ्क पर एकाधिकेन का चिह्न लगाइये।

1) सामान्य संख्या को विनकुलम् संख्या में बदलना ।

उदाहरण : 1 6 8 सामान्य संख्या को विनकुलम् संख्या में बदलिए।

हल : संख्या 1 6 8 को विनकुलम् संख्या में बदलने पर –

$$1\ 6\ 8$$

$$= \quad 1\ \dot{6}\ \bar{2}$$

$= \quad 1\ 7\ \bar{2}$

$= \quad \dot{1}\ \bar{3}\ \bar{2}$

$= \quad 2\ \bar{3}\ \bar{2}$

2) विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या मे बदलना

(एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र + निखिलम् सूत्र)

विधि –

1) इकाई अङ्क के धनात्मक मान को 10 से घटाइये ।

2) शेष निखिलम् अङ्कों (इकाई के अङ्कों छोड़कर) के धनात्मक मानों को 9 से घटाइये।

3) आवश्यकतानुसार उपर्युक्त क्रियाविधि को दोहराइये (आवृत्ति) कीजिए ।

आइए , उदाहरणों से स्पष्ट करते हैं ।

विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या में बदलने पर

उदाहरण : $2\ \bar{7}$ विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या में बदलिए।

हल : संख्या $2\ \bar{7}$को विनकुलम् संख्या में बदलने पर

$= \quad 2\ \bar{7}$

$= \quad \dot{2}\ 3$

$= \quad 1\ 3$

उदाहरण : $6\ \bar{2}\ \bar{4}$ विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या में बदलिए।

हल : संख्या $6\ \bar{2}\ \bar{4}$को विनकुलम् संख्या में बदलने पर

$= \quad 6\ \bar{2}\ \bar{4}$

$= \underset{\cdot}{6}\ 8\ \bar{4}$

$= 5\ 8\ \bar{4}$

$= 5\ \underset{\cdot}{8}\ 6$

$= 5\ 7\ 6$

3) दो संख्याओं का गुणन (सूत्र निखिलं नवत: चरमं दशत:)

जब दो संख्याओं आधार 10 या 100 या 10 की घात के निकट होता है तो उनका गुणनफल सूत्र निखिलम् के आधार पर बड़ी सरलता से किया जा सकता है ।

विधि –

1) संख्याओं के अनुसार निकटतम आधार 10 या 100 चुनिए ।

2) आधार के सापेक्ष विचलनों को उनकी संख्या के सामने लिखिए ।

3) तिरछी रेखा से गुणनफल स्थान के दो भाग कीजिए ।

4) दाहिने पक्ष के विचलनों का गुणनफल लिखिए ।

5) वाम पक्ष में एक संख्या + दूसरी संख्या का विचलन लिखिए ।

6) आधार में जितने शून्य उतने ही अङ्क दाहिने पक्ष में रखिए अङ्क संख्या की कमी 0 लिखकर पूरी कीजिए यदि अङ्क अधिक हो तो बायें पक्ष में जोड़िये ।

7) विचलनों का गुणनफल यदि ऋणात्मक हो तो बायें पक्ष से एक आदि लेकर धनात्मक रूप में बदलिए ।

ध्यान रहे – बायें पक्ष से आये एक का मान दाहिने पक्ष के आधार के बराबर होता है ।

आइए , उदाहरणों से स्पष्ट करते हैं ।

उदाहरण : निखिलम् नवत: चरमं दशत: (आधार 10 एवं 100) विधि से गुणा कीजिए ।

- **जब आधार 100 हो**

2) गुणा करें: 92 × 93

$$\begin{array}{rr} 92 & -08 \\ \times\ 93 & -07 \\ \hline \end{array}$$

92 – 7 / (– 8) × (– 7)

85 / 56

= 8556

अत: 92 × 93 = 8556

सङ्केत –

1) विचलन = – 08, – 07

2) दायें पक्ष में दो अङ्क अत: 56 को लिखें ।

3) गुणा करें - 93 × 102

$$\begin{array}{rr} 93 & -7 \\ \times\ 102 & +2 \\ \hline \end{array}$$

93 + 2 / (–7) × 2

$\underbrace{95 \ / -14}_{+1}$

94 / 100 – 14

94 / 86

= 9486

अत: 93 × 102 = 9486

सङ्केत –

1) गुणनफल

95 /– 14

2) बायें पक्ष से 1 दायें पक्ष में लाइये।

3) दायें पक्ष में 1 का स्थानीयमान = 100

4) दो संख्याओं का गुणन (उपाधार सूत्र – निखिलं नवत: चरमं दशत:)

किसी प्रश्न में विचलन बड़े प्राप्त होने से उनका गुणा करना कठिन हो जाता है। ऐसी स्थिति में **उपाधार की सङ्कल्पना** का प्रयोग करते हैं। इसमें उपाधार अङ्क का गुणा बायें पक्ष में किया जाता है एवं दायाँ पक्ष पूर्व समान रहता है ।

उदाहरण : निखिलम् नवत: चरमं दशत: (उपाधार विधि) से गुणा कीजिए ।

1) गुणा करें- 64×67

$$\begin{array}{rr} 64 & +4 \\ \times\ 67 & +7 \\ \hline \end{array}$$

$(64 + 7) \times 6 \ / \ 4 \times 7$

$71 \times 6 \ / \ 28$

$426 + 2 \ / \ 8$

$= 4288$

अत: $64 \times 67 = 4288$

सङ्केत –

1) उपाधार $= 10 \times 6$

आधार अंक $= 6$

2) बायें पक्ष में उपाधार अंक 6 का गुणा

$= 71 \times 6 = 426$

3) उसके बाद दायें पक्ष का समायोजन करना चाहिए ।

3) गुणा करें- 306×312

$$\begin{array}{rr} 306 & +6 \\ \times\ 312 & +12 \\ \hline \end{array}$$

$318 \times 3 \ / \ 72$

$954 \ / \ 72$

$= 95472$

अत: $306 \times 312 = 95472$

सङ्केत –

1) आधार $= 100$

2) उपाधार $= 100 \times 3$

उपाधार अङ्क $= 3$

3) विचलन $= +6$ तथा $+12$

भाग सङ्क्रिया (सूत्र निखिलं नवत: चरमं दशत:) –

प्रश्न लिखने की विधि – दो खड़ी रेखाओं निर्धारित स्थान के तीन खण्ड बनाइये, बायीं ओर प्रथम खण्ड में भाजक और उसके नीचे पूरक संख्या लिखिए। आधार में जितने शून्य है, भाज्य के उतने ही अङ्क इकाई अङ्क की तरफ से तीसरे खण्ड में लिखिए भाज्य के शेष अङ्क मध्य खण्ड में लिखिए।

उदाहरण : भागफल ज्ञात कीजिए - 1 1 8 9 ÷ 8 8

हल:

88	1 1	8 9
12	1	2
		2 4
	1 2	13 3
	+1	– 88
	13	45
	भागफल	शेषफल

सङ्केत –

1) पूरक संख्या = 100 – 88 = 12

2) मध्य खण्ड का 1 नीचे लिखें 1 × 12 = 12 के अङ्क मध्य खण्ड में आगे के अङ्कों के नीचे लिखा।

3) 1 + 1 = 2 मध्य खण्ड में नीचे लिखें।

4) $2 \times 12 = 24$ मध्य एवं तृतीय खण्ड में दर्शाये अनुसार लिखें ।

5) योगफल करें – भागफल = 12, शेषफल = 133

6) शेषफल > भाजक से

अत: संशोधन आवश्यक है । तब,

संशोधित भागफल = 13, शेषफल = 45

➢ **उत्तर जाँचने की विधियाँ:** गणित में किसी भी सङ्क्रिया से प्राप्त उत्तर जाँच करने की विधि-

बीजाङ्क विधि :- किसी भी संख्या का बीजाङ्क ज्ञात करने के लिये उस संख्या के अङ्कों का योग एक अङ्क प्राप्त होने तक करते हैं।

जैसे: क) 134 का बीजाङ्क 1+3+4 = 8

ख) 78 का बीजाङ्क 7+ 8 = 15 यहाँ,15 प्राप्त हुआ है जो कि बीजाङ्क नहीं हैं।

अत: इसके अङ्कों को पुन: जोड़ेंगे 1+5 = 6

➢ **योग सङ्क्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच**

संख्याओं के बीजांकों का योग का बीजाङ्क = उत्तर का बीजाङ्क होने पर उत्तर सही होगा।

उदाहरण:

	4 8 1 5	9
	2 4 8 7	3
+	1 9 0 4	5
	9 2 0 6	8

जाँच: संख्याओं के बीजाङ्क के योग का बीजाङ्क

$9 + 3 + 5 \rightarrow 17 \rightarrow 1 + 7 \rightarrow 8$

उत्तर का बीजाङ्क $9 + 2 + 0 + 6 \rightarrow 17 \rightarrow 1 + 7 \rightarrow 8$ दोनों बीजाङ्क बराबर हैं।

अर्थात् उत्तर सही है।

- **व्यवकलन सङ्क्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच** - (इसमें घटने वाली (नीचे की) संख्या का बीजाङ्क + उत्तर का बीजाङ्क) के योगफल का बीजाङ्क = ऊपर की संख्या का बीजाङ्क

उदाहरण:

	781	7
−	325	1
	456	6

जाँच: क) घटने वाली (नीचे की) संख्या का बीजाङ्क + उत्तर का बीजाङ्क →

1 + 6 → 7

ख) वियोज्य (ऊपर) कि संख्या का बीजाङ्क → 7

दोनों बीजाङ्क बराबर है ,अर्थात् उत्तर सही है।

- **गुणा सङ्क्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच**

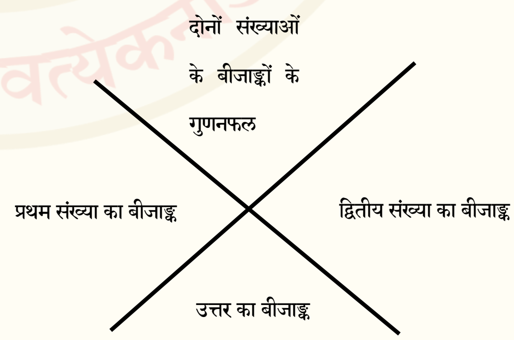
(प्रथम संख्या का बीजाङ्क × द्वितीय संख्या का बीजाङ्क)

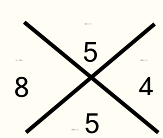
से प्राप्त गुणनफल का बीजाङ्क = उत्तर का बीजाङ्क

उदाहरण : 413 × 517

हल:

$$\begin{array}{r} 413 \times 517 \\ \hline 2891 \\ 4130 \\ 206500 \\ \hline 213521 \end{array}$$





जाँच : क) प्रथम संख्या का बीजाङ्क×द्वितीय संख्या का बीजाङ्क →प्राप्त गुणनफल का बीजाङ्क

$8 \times 4 = 32$ का बीजाङ्क $\rightarrow 5 \rightarrow$

ख) उत्तर का बीजाङ्क → 5

दोनों बीजाङ्क बराबर है,अर्थात् उत्तर सही है।

- **भाग सङ्क्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच**

उदाहरण: $4857 \div 14$

हल: भाजक 14) 4857 (346 भागफल

$$
\begin{array}{r}
\underline{-42} \\
065 \\
\underline{-\ 56} \\
097 \\
\underline{-\ 84} \\
13
\end{array}
$$

शेषफल

जाँच :

भाज्य का बीजाङ्क = (भागफल का बीजाङ्क × भाजक का बीजाङ्क) + शेषफल का बीजाङ्क

$\longrightarrow$ 6 (4 × 5) + 4

$\longrightarrow$ 20 + 4

$\longrightarrow$ 24

$\longrightarrow$ 6 अर्थात् उत्तर सही है।

अभ्यास प्रश्नावली - 4

1. निम्नलिखित रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(अ) एकाधिकेन सूत्र का अर्थ .... है।

(द) $456 \times 999 = $ ....

(प) $456 \times 99999 = $ ....

(फ) $4568 \times 99 = $ ....

(ब) सामान्य संख्या 28 को विनकुलम् संख्या में .... लिखते हैं।

(स) विनकुलम् संख्या $3\bar{3}$ को सामान्य संख्या में .... लिखते हैं।

(भ) संख्या 89 का विचलन = ... है।

2. सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा योग कीजिए।

1)
$$\begin{array}{r} 98765 \\ 34549 \\ +\ 12757 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 38219 \\ 21989 \\ +\ 13456 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 456 \\ 397 \\ +138 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

3. वैदिक विधि से व्यवकलन (अन्तर) कीजिये।

1)
$$\begin{array}{r} 982 \\ -\ 137 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 747 \\ -388 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 4037 \\ -2158 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

4. सूत्र (अन्त्ययोर्दशकेऽपि + एकाधिकेन) द्वारा गुणा कीजिए।

1) 9 7 $\times$ 9 3 $\boxed{}$ 2) 5 8 $\times$ 5 2 $\boxed{}$ 3) 7 7 $\times$ 7 3 $\boxed{}$

5. वैदिक विधि से गुणा कीजिए। (सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण के प्रयोग से)

1) $2\frac{5}{7} \times 2\frac{3}{7}$ 2) $5\frac{11}{3} \times 5\frac{2}{3}$ 3) $5\frac{5}{3} \times 5\frac{5}{3}$ 4) $6\frac{11}{7} \times 6\frac{2}{7}$

6. सामान्य संख्या को विनकुलम् संख्या में बदलिए।

अ) 89 ब) 187 स) 253

7. विनकुलम् संख्या को सामान्य संख्या में बदलिए।

अ) $3\bar{2}1$ ब) $4\bar{3}2$ स) $5\bar{3}\bar{4}$

8. सूत्र निखिलम् नवतः चरमं दशतः द्वारा गुणा कीजिए।

अ) 1 0 3 $\times$ 1 0 7 $\boxed{}$ ब) 9 4 $\times$ 9 5 $\boxed{}$ स) 1 0 8 $\times$ 1 0 5 $\boxed{}$ द) 9 6 $\times$ 9 3 $\boxed{}$

प) 7 3 $\times$ 7 4 $\boxed{}$ फ) 2 0 3 $\times$ 2 0 4 $\boxed{}$ भ) 5 0 6 $\times$ 5 0 4 $\boxed{}$ म) 8 1 0 $\times$ 8 0 4 $\boxed{}$

9. निखिलम् नवतः चरमं दशतः विधि से भाग दीजिए।

अ) 1245 ÷ 97 ब) 311 ÷ 8 स) 1013 ÷ 88

अध्याय 5

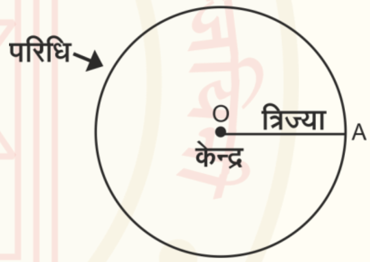
वृत्त

वृत्त –

वास्तव में एक वृत्त परकार को घुमाने पर पेन्सिल की नोंक से अनवरत अंकित अनन्त बिन्दुओं का समूह (सम्मुच्चय) है अर्थात् **एक तल चर उन सभी बिन्दुओं का समूह जो तल के एक स्थिर बिन्दु से एक स्थिर दूरी पर स्थित है** ,एक **वृत्त** कहलाता है ।

वृत्त का केन्द्र एवं त्रिज्या –

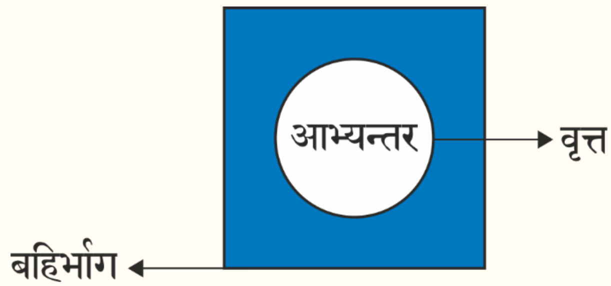
स्थिर बिन्दु को **वृत्त का केन्द्र** कहते हैं तथा स्थिर दूरी को **वृत्त की त्रिज्या** कहते हैं । आकृति में वृत्त का केन्द्र O है और OA वृत्त की त्रिज्या है । सम्पूर्ण वृत्त की लम्बाई **वृत्त की परिधि** कहलाती है ।



ध्यान दीजिए - वृत्त केन्द्र और परिधि को मिलाने वाली रेखाखण्ड वृत्त की **त्रिज्या** कहलाती है।

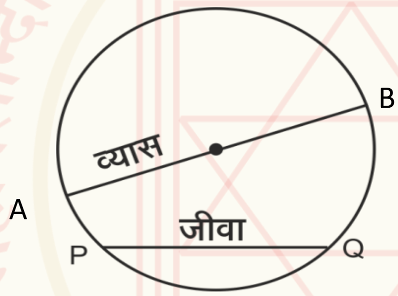
एक वृत्त के तल को जिस पर वह स्थित है उसे तीन भागों में बाँटा गया है ।

1) **आभ्यन्तर** – वृत्त के अन्दर का माप जिसे आभ्यन्तर कहते हैं ।
2) **परिसीमा** – वृत्त (आकृति स्वयं)
3) **बहिर्भाग** – वृत्त के बाहर का भाग जिसे बहिर्भाग कहते हैं ।



वृत्त तथा इसका आभ्यन्तर मिलकर **वृत्त क्षेत्र** बनाते हैं ।

जीवा और व्यास –वृत्त पर स्थित दो बिन्दु P व Q को स्केल की सहायता से मिलने पर प्राप्त रेखाखण्ड $\overline{PQ}$ वृत्त की **जीवा** कहलाती है । यदि कोई जीवा वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरती है तो वह जीवा उस वृत्त का **व्यास** कहलाती है । जैसे : AB



वृत्त की **सबसे बड़ी जीवा व्यास** होती है, वृत्त का **व्यास, त्रिज्या की माप का दो गुणा** होता है। अर्थात् **व्यास = 2 × त्रिज्या** तथा **त्रिज्या =** $\frac{\text{व्यास}}{2}$

उदाहरण : यदि वृत्त की त्रिज्या 10 से.मी. है तो व्यास कितने से.मी. होगा ।

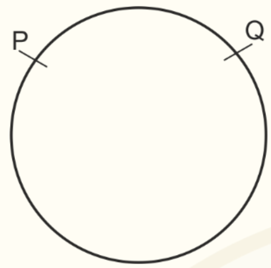
हल :दिया है वृत्त की त्रिज्या = 10 से.मी.

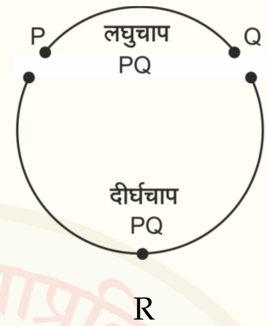
हम जानते हैं - **व्यास = 2 × त्रिज्या**

= 2 × 10 = 20 से.मी.

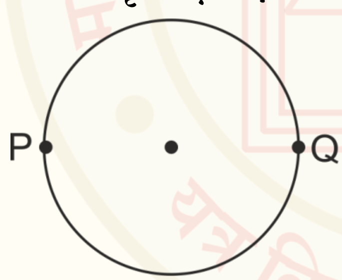
अत: 10 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त का व्यास 20 से.मी. होगा ।

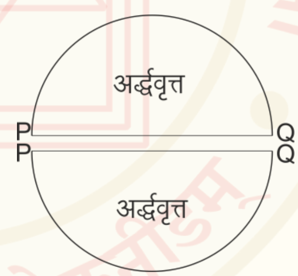
चाप – दो बिन्दुओं के बीच के वृत्त भाग को **चाप** कहते हैं । निम्न आकृति में वृत्त पर दो बिन्दु P एवं Q दिखाए गए हैं। जो वृत्त को दो भागों में विभाजित करता है ।





यदि दोनों चापों को उपर्युक्त आकृति में अलग-अलग करके देखें तो लघु चाप ($\overset{\frown}{PQ}$) से दर्शाते हैं । परन्तु दीर्घ चाप PQ में एक बिन्दु R लेकर चाप ($\overset{\frown}{PRQ}$)द्वारा व्यक्त करते हैं । यदि P और Q व्यास पर स्थित हों और दोनों चाप समान होते है तो प्रत्येक चाप को **अर्द्धवृत्त** कहते हैं । निम्न आकृति देखिए -





वृत्तखण्ड –

केन्द्र रहित एक क्षेत्र जो वृत्त की एक जीवा और एक चाप से घिरा होता है। एक जीवा वृत्त को दो वृत्तखण्डों में विभाजित करती है ।

1) दीर्घ वृत्तखण्ड

2) लघु वृत्तखण्ड

त्रिज्याखण्ड –

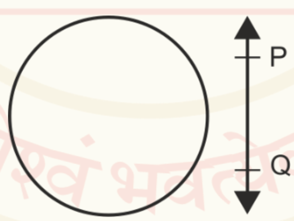
किन्हीं दो त्रिज्याओं के बीच एक चाप से घिरा हुआ क्षेत्र **त्रिज्याखण्ड** कहलाता है। निम्न आकृति में OPQ लघु त्रिज्याखण्ड व शेष दीर्घ त्रिज्याखण्ड है ।

वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ -

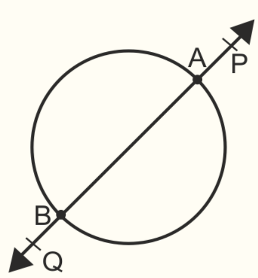
- वृत्त के समतलीय सीधी रेखा जो एक बिन्दु पर वृत्त को स्पर्श (टच) करती है। वृत्त की **स्पर्श रेखा** कहलाती है।

एक तल में स्थित एक वृत्त तथा एक रेखा की विभिन्न स्थितियाँ –

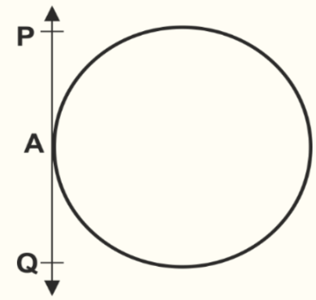
अ) रेखा PQ और वृत्त में कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं है । इस दशा में PQ को वृत्त के सापेक्ष **अप्रतिच्छेदी रेखा** कहते हैं ।



ब) रेखा P और Q वृत्त में दो उभयनिष्ठ बिन्दु A और B हैं ।इस दशा में रेखा को वृत्त की **छेदक रेखा** कहते हैं ।अर्थात् एक विस्तारित जीवा जो वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदी करती है **छेदक रेखा** कहलाती है ।



स) रेखा PQ वृत्त में केवल एक उभयनिष्ठ बिन्दु A है।इस दशा में रेखा को PQ को वृत्त की **स्पर्श रेखा**(tangent)कहते हैं ।



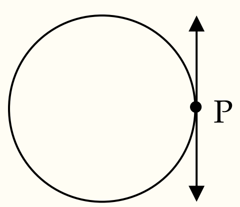
वृत्त की स्पर्श रेखा – किसी वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है,जो वृत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। किसी वृत्त की स्पर्श छेदक रेखा की विशिष्ट दशा है।वृत्त की स्पर्श रेखा को अंग्रेजी में tangent कहते हैं।

स्पर्श रेखा के गुण –

अ) वृत्त के एक बिन्दु पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा होती है।

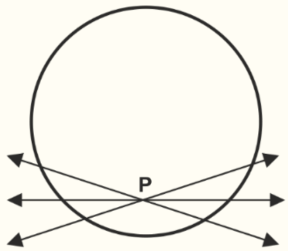
ब) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा छेदक रेखा की एक विशिष्ट दशा है जब संगत जीवा के दोनों सिरे सम्पाती हो जाएँ ।

स) स्पर्श रेखा और वृत्त के उभयनिष्ठ बिन्दु (common point) को स्पर्श बिन्दु (Point of Contact) कहते हैं तथा स्पर्श रेखा को वृत्त के उभयनिष्ठ बिन्दु पर स्पर्श करना चाहते हैं,तो वह बिन्दु स्पर्श बिन्दु कहलाता है।

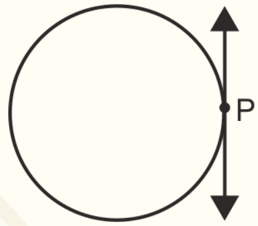


यहाँ P बिन्दु को स्पर्श बिन्दु कहते हैं ।

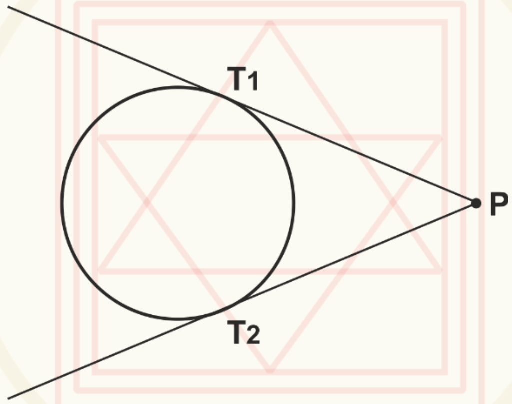
द) वृत्त के अन्दर स्थित किसी बिन्दु से बिन्दु से जाने वाली वृत्त पर कोई स्पर्श रेखा नहीं है।



य) वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा खींची जा सकती है ।



प) वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से जाने वाली वृत्त पर दो और केवल दो स्पर्श रेखाएँ है।



दी गई आकृति में PT_1 व PT_2 के क्रमशः T_1 तथा T_2 स्पर्श बिन्दु है ।

फ) बाह्य बिन्दु P से वृत्त के स्पर्श बिन्दु तक स्पर्श रेखाखण्ड की लम्बाई को बिन्दु P से वृत्त पर रेखा की लम्बाई कहते हैं ।

अभ्यास प्रश्नावली - 5

1. रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

1) वृत्त का केन्द्र वृत्त के................में स्थित है । (बहिर्भाग / आभ्यन्तर)

2) वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त का.............होता है ।

3) वृत्त के चाप एवं जीवा के मध्य का क्षेत्र.............होता है ।

4) दो त्रिज्या तथा चाप द्वारा घेरा गया क्षेत्र...........................होता है ।

5) वृत्त के केन्द्र और परिधि के बीच की दूरी............................कहलाती है ।

6) व्यास वृत्त की सबसे...................जीवा है । (छोटी / बड़ी)

2. सत्य / असत्य लिखिए ।

1) वृत्त एक समतल आकृति है ।

2) जीवा और संगत चाप के बीच का क्षेत्र त्रिज्याखण्ड होता है ।

3) केन्द्र से वृत्त पर किसी बिन्दु को मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त की त्रिज्या होती है ।

4) वृत्त के अन्दर अनन्त व्यास खींचे जा सकते हैं ।

3. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प का चयन कीजिये।

(अ) अर्द्धवृत्त का कोण होता है-

(I) न्यूनकोण (II) समकोण (III) अधिककोण (IV) ऋजुकोण

(ब) एक ही वृत्तखण्ड के कोण होते है-

(I) असमान (II) समान (III) (1) और (2) दोनों (IV) इनमें से कोई नहीं

4. वृत्त की स्पर्श रेखा और छेदक रेखा में क्या अन्तर है ?

5. रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

(स्पर्श, छेदक रेखा, एक और केवल एक, दो और केवल दो, बराबर, स्पर्श बिन्दु)

अ) एक विस्तारित जीवा, जो वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदी करती है , ...कहलाती है ।

ब)	वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर................स्पर्श रेखा है ।

स)	वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से जाने वाली वृत्त पर.............स्पर्श रेखा है ।

द)	वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से खींची जाने वाली दोनों स्पर्श रेखा ....होती है ।

य)	स्पर्श रेखा और वृत्त के उभयनिष्ठ बिन्दु (कॉमन प्वाइंट) को ....कहते हैं ।

प)	वृत्त के एक बिन्दु पर एक और केवल एक.......................रेखा होती है ।

अध्याय - 6

त्रिभुज की सर्वाङ्गसमता एवं समरूपता

- तीन बिन्दुओं से घिरी हुई बन्द आकृति को त्रिभुज कहते हैं। त्रिभुज के तीनों अन्त: कोणों का योग 180^0 होता है। क्या आप त्रिभुज के प्रकार (भुजा एवं कोणों के आधार पर) का वर्गीकरण कर सकते हैं ?

सर्वाङ्गसमता की अवधारणा -

सर्वाङ्गसमता का अर्थ है- 'सभी प्रकार से बराबर' अर्थात् दो आकृतियाँ जिनका आकार एवं माप में एक-दूसरे के समान हो । **सर्वाङ्गसम आकृति** कहलाती है । सर्वाङ्गसम आकृति यह गुण सर्वाङ्गसमता कहलाता है। सर्वाङ्गसमता को दर्शाने के लिए संकेत '≅' का प्रयोग किया जाता है । सर्वाङ्गसमता के कई उदाहरण आप अपने दैनिक जीवन में देखते हैं ।

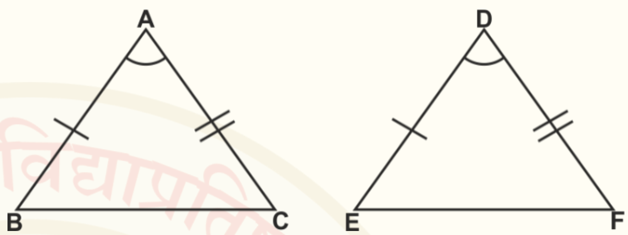
जैसे: 1) 10 रुपये के 2 सिक्के

2) पोस्टकार्ड पर दो डाक टिकट

त्रिभुजों की सर्वाङ्गसमता : हम जानते हैं की **त्रिभुज के कुल 6 अवयव में तीन भुजाएँ एवं तीन कोण होते हैं।** 'दो त्रिभुज सर्वाङ्गसम कहलाते है। यदि दोनों त्रिभुज एक-दूसरे को पूर्णत: ढक ले।' आइये, त्रिभुज की सर्वाङ्गसमता के नियम पर चर्चा करते हैं।

सर्वाङ्गसमता के नियम : त्रिभुज की सर्वाङ्गसमता के लिए त्रिभुज के छ: अवयव में से कोई तीन अवयव के समान होने पर भी दो त्रिभुज सर्वाङ्गसम होंगे । यदि –

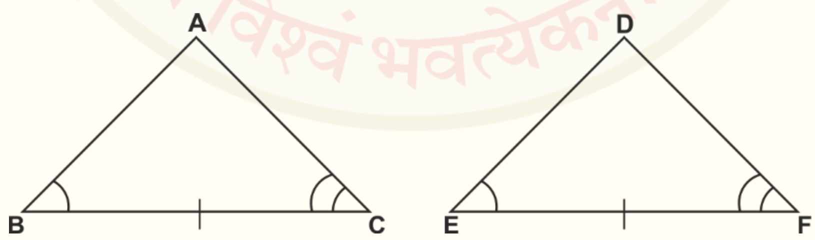
1. SAS **सर्वाङ्गसमता के नियम (भुजा कोण भुजा) :** यदि एक त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ और उनके मध्य का कोण दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाएँ एवं उनके मध्य का कोण बराबर हो तो वह दोनों त्रिभुज सर्वाङ्गसम होते हैं।



उपर्युक्त त्रिभुज ABC एवं त्रिभुज DEF में दो भुजाओं के युग्म में AB = DE, AC = DF तथा उनके मध्य का कोण $\angle A = \angle D$ समान है अतः दोनों त्रिभुज भुजा कोण भुजा नियम से सर्वाङ्गसम होंगे । यह सर्वाङ्गसमता को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$\Delta BAC \cong \Delta EDF$$

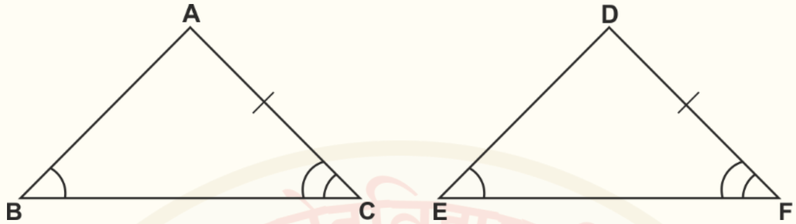
2. ASA **सर्वाङ्गसमता के नियम (कोण भुजा कोण) :** यदि किसी त्रिभुज के कोई दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोण और एक संगत भुजा के बराबर हो तो वे त्रिभुज सर्वाङ्गसम होते हैं ।



उपर्युक्त त्रिभुज ABC एवं त्रिभुज DEF में भुजा BC = EF दो कोणों के युग्म $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ में समान है अतः दोनों त्रिभुज कोण भुजा कोण नियम से सर्वाङ्गसम होंगे।

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

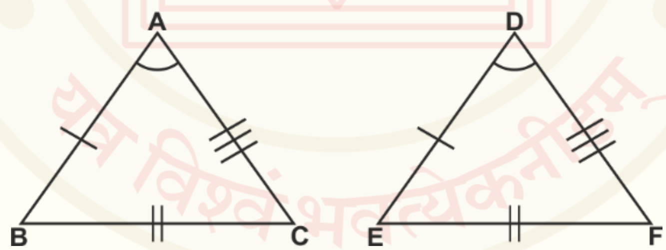
3. **AAS सर्वाङ्गसमता के नियम(कोण कोण भुजा) :** दो त्रिभुज सर्वाङ्गसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के दो कोण तथा एक भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोण एवं एक भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वाङ्गसम होते हैं।



उपर्युक्त त्रिभुज ABC एवं त्रिभुज DEF में भुजा AC = DF दो कोणों के युग्म $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ में समान है अतः दोनों त्रिभुज कोण भुजा कोण नियम से सर्वाङ्गसम होंगे।

➢ AAS सर्वाङ्गसमता का नियम, ASA सर्वाङ्गसमता का ही एक मानदण्ड है।

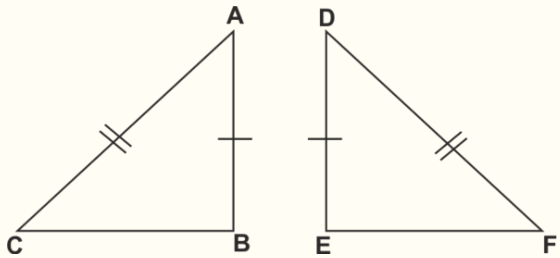
4. **SSS सर्वाङ्गसमता के नियम (भुजा भुजा भुजा) :** यदि एक त्रिभुज के तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज के तीनों संगत भुजाओं के बराबर हों तो वह त्रिभुज सर्वाङ्गसम होते हैं । तीन भुजाओं के युग्म में समान है अतः दोनों त्रिभुज भुजा भुजा भुजा नियम से सर्वाङ्गसम होंगे।



उपर्युक्त त्रिभुज ABC एवं त्रिभुज DEF में भुजाओं के युग्म में AB = DE , BC = EF तथा AC = DF उनके बीच के संगत कोण $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ तथा $\angle C = \angle F$ समान है। अतः दोनों त्रिभुज SSS (भुजा भुजा भुजा) नियम से सर्वाङ्गसम होंगे ।

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

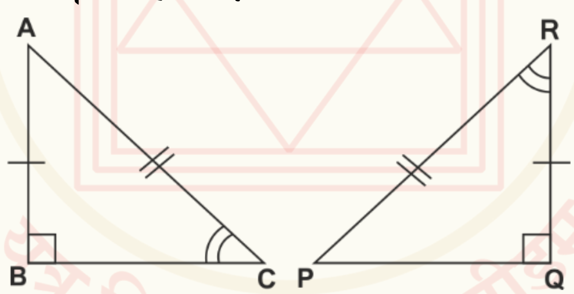
5. **RHS सर्वाङ्गसमता के नियम :** यदि किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण दूसरे समकोण त्रिभुज की संगत एक भुजा और कर्ण के बराबर हो तो वह त्रिभुज सर्वाङ्गसम होते हैं।



उपर्युक्त समकोण कर्ण भुजा (RHS) नियम में R = समकोण (Right angle), H = कर्ण (Hypotenuse) तथा S = भुजा (Side) को दर्शाता हैं । त्रिभुज ABC एवं त्रिभुज DEF में $\angle B = \angle E$ = समकोण (90^0), कर्ण भुजा AC = DF तथा भुजा BC = EF है। अत: RHS नियम से दोनों त्रिभुज सर्वाङ्गसम होंगे ।

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

उदाहरण : संलग्न आकृति में एक सर्वाङ्गसम भागों का एक अतिरिक्त युग्म बताइए जिससे ΔABC और ΔPQR सर्वाङ्गसम हो जाएँ। आपने किस प्रतिबन्ध का प्रयोग किया ?



हल : यहाँ, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

$\therefore$ $\angle B = \angle Q$ एवं $\angle C = \angle R$

$\therefore$ सर्वाङ्गसम भागों का अतिरिक्त युग्म–

$$BC = QR$$

अत: हमने यहाँ ASA सर्वाङ्गसम प्रतिबन्ध का प्रयोग किया है।

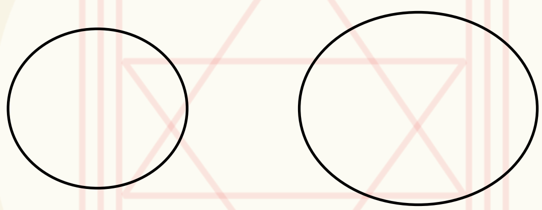
समरूपता की अवधारणा :

दो वस्तुएँ जिनके माप अलग-अलग है परन्तु एक ही आकार हो समरूप वस्तुएँ कहलाती है ओर यह गुण **समरूपता** कहलाता है।

आइये, समरूपता को कुछ निम्न उदाहरणों के माध्यम से समझते हैं

1. दो रेखाखण्ड जो एक ही लम्बाई के हों सर्वाङ्गसम तथा समरूप होते हैं परन्तु अलग-अलग लम्बाई के रेखाखण्ड समरूप होते हैं सर्वाङ्गसम नहीं।

2. दो एक समान त्रिज्या वाले वृत्त सर्वाङ्गसम तथा समरूप होते हैं परन्तु भिन्न त्रिज्या वाले वृत्त समरूप होते हैं सर्वाङ्गसम नहीं।



उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि वे दो आकृति जिसका आकार एवं माप समान हों सर्वाङ्गसम आकृति कहलाती हैं। तथा दो आकृति जिनका आकार समान होता है परन्तु माप नहीं है।ऐसी आकृति समरूप आकृति कहलाती हैं ।

त्रिभुजों की समरूपता : आपको स्मरण होगा कि त्रिभुज सबसे कम भुजाओं से बनने वाला बहुभुज है । हम त्रिभुजों की समरूपता के लिए भी निम्न प्रतिबन्ध लिख सकते हैं । अर्थात् दो त्रिभुज समरूप होते हैं । यदि-

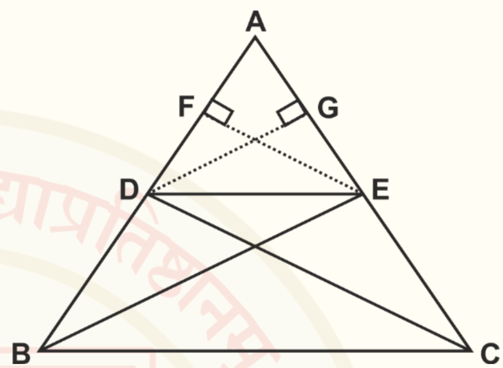
क) उनके संगत कोण बराबर हों ।

ख) तथा उनकी संगत भुजाओं एक ही अनुपात में (अर्थात् समानुपाती) हों ।

याद रहे कि यदि दो त्रिभुज के संगत कोण बराबर हों तो वे समानकोणिक त्रिभुज (equinangular triangles) कहलाते हैं।

प्रमेय : आधारभूत आनुपातिक प्रमेय का कथन (थेल्स प्रमेय) लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

कथन : एक त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गयी रेखा अन्य दो भुजाओं को जिन दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, वे बिन्दु भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करते हैं।



दिया हैं : ΔABC में $DE \parallel BC$ तथा DE, भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर काटती हैं।

सिद्ध करना हैं : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

रचना : BE और CD को मिलाया तथा $DG \perp AC$ तथा $EF \perp AB$ खींचा।

उत्पत्ति : ΔADE एवं ΔDBE में-

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times AD \times EF$ ....(i)

त्रिभुज DBE का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times DB \times EF$ ....(ii)

समीकरण (1) में समीकरण (2) का भाग देने पर-

$$\frac{\text{त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज DBE का क्षेत्रफल}} = \frac{(\frac{1}{2} \times AD \times EF)}{(\frac{1}{2} \times DB \times EF)}$$

$$\frac{\text{त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज DBE का क्षेत्रफल}} = \frac{AD}{DB} \quad ....(iii)$$

अब ΔADE और ΔECD में,

त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AE \times DG$ .... (iv)

त्रिभुज ECD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times EC \times DG$ .... (v)

समीकरण (iv) में समीकरण (v) का भाग देने पर-

$$\frac{\text{त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज ECD का क्षेत्रफल}} = \frac{(\frac{1}{2} \times AE \times DG)}{(\frac{1}{2} \times EC \times DG)}$$

$$\frac{\text{त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज ECD का क्षेत्रफल}} = \frac{AE}{EC} \quad \text{..............(vi)}$$

$$\frac{\text{त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज DBE का क्षेत्रफल}} = \frac{AE}{EC} \quad \text{..............(vii)}$$

समीकरण (iii) व समीकरण (vi) से,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

अत: आधारभूत आनुपातिक प्रमेय $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ सिद्ध हुआ ।

अभ्यास प्रश्नावली - 6

1. रिक्त-स्थानों कि पुर्ति कीजिये।

(अ) दो रेखाखण्ड सर्वाङ्गसम होते हैं यदि .... ।

(ब) दो सर्वाङ्गसम कोणों में से एक कोण की माप 80° है तो दूसरे कोण की माप...........होती है।

(स) सभी वर्गाकार आकृतियाँ .... होते हैं। (समरूप, सर्वाङ्गसम)

(द) सभी .... त्रिभुज समरूप होते हैं। (समद्विबाहु, समबाहु)

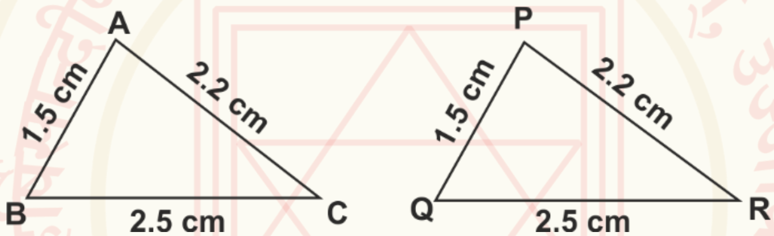
2. दैनिक जीवन से सम्बन्धित दो सर्वाङ्गसम आकारों के उदाहरण दीजिए।

3. यदि सुमेलन ABC ↔ FED के अन्तर्गत $\Delta ARC \cong \Delta FED$ तो त्रिभुजों के सभी संगत सर्वाङ्गसम भागों को लिखिए।

4. यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ हो, तो ΔPQR के उन भागों को लिखिए जो निम्न के संगत हों :(i) $\angle B$ (ii) $\overline{BC}$ (iii) $\angle C$ (iv) $\overline{AC}$

5. निम्न आकृति में त्रिभुजों की भुजाओं की लम्बाइयाँ दर्शाई गई हैं । सर्वाङ्गसमता के प्रतिबन्ध SSS का प्रयोग करके बताइए कि कौन-कौन से त्रिभुज सर्वाङ्गसम हैं । सर्वाङ्गसमता की स्थिति में उत्तर को सांकेतिक रूप में लिखिए ।

(i)

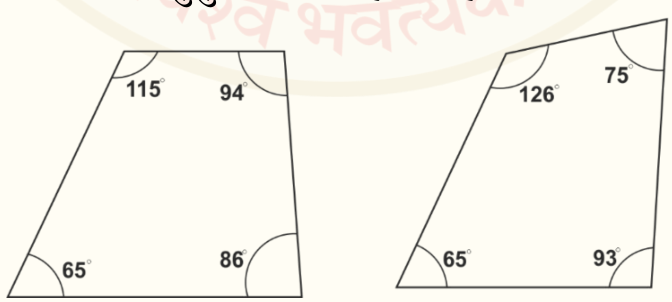


6. निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न-भिन्न उदाहरण दीजिए।

(अ) समरूप आकृतियाँ

(ब) ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं।

7. बताइए कि निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप हैं या नहीं।



8. आधारभूत आनुपातिक प्रमेय कथन लिखिए।

अध्याय 7

बौधायन (पाइथागोरस) प्रमेय

➢ तीन बिन्दुओं से घिरी हुई बन्द् समतल आकृति **त्रिभुज** कहलाती है। है। त्रिभुज तीन कोण, तीन भुजाओं से मिलकर बना होता है ।

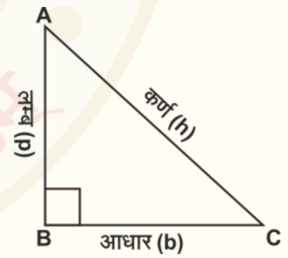
कोणों के आधार पर त्रिभुज -

(1) **न्यूनकोण त्रिभुज** - वह त्रिभुज जिसके तीनों कोण न्यूनकोण (90^0 से कम) हों **न्यूनकोण त्रिभुज** कहलाता है ।

(2) **समकोण त्रिभुज** - वह त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण (90^0) हो **समकोण त्रिभुज** कहलाता है ।

(3) अधिक कोण - वह त्रिभुज जिसका एक कोण अधिक कोण (90^0 से अधिक)शेष दोनों कोणों न्यून कोण हों **अधिककोण त्रिभुज** कहलाता है ।

समकोण त्रिभुज का परिचय –



उपर्युक्त त्रिभुज ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें लम्ब व आधार दो भुजाएँ मिलकर समकोण (90^0) बनाती हैं । दिये गये त्रिभुज ABC मे $\angle B$ समकोण (90^0) है ।

कर्ण (Hypotenuse) –

- समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने की भुजा को **कर्ण** कहा जाता है ।
- कर्ण समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा होती है ।
- कर्ण की लम्बाई शेष दोनों भुजाओं की लम्बाई के योग से कम होती है , कर्ण को प्राय: अंग्रेजी के “h” से दर्शाया जाता है ।

आधार (Base)-

- एक समकोण त्रिभुज में कर्ण छोड़कर नीचे वाली भुजा जो आधार का कार्य करती है , प्राय: **आधार** कहलाती है ।
- समकोण त्रिभुज की एक न्यूनकोण की संलग्न भुजा को आधार कहा जाता है । (**जैसे** : ∠C की संलग्न भुजा आधार है ।)
- आधार को प्राय: अंग्रेजी के अक्षर "b" से दर्शाया जाता है ।

लम्ब(Perpendicular) -

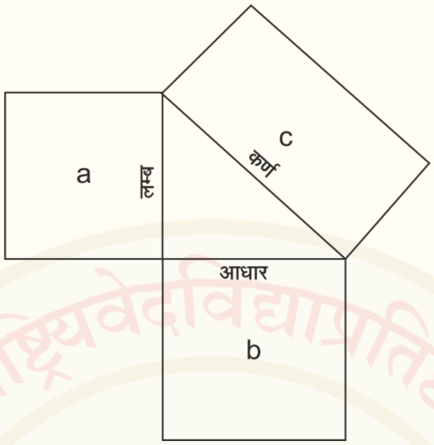
- समकोण त्रिभुज में किसी न्यूनकोण के सम्मुख की भुजा को **लम्ब** कहा जाता है। (**जैसे** : ∠A के संलग्न भुजा लम्ब है ।)
- लम्ब ऊँचाई को भी कहा जाता है लम्ब को प्राय: अंग्रेजी के अक्षर "p" से निरूपित किया जाता है ।

नोट – समकोण त्रिभुज में 90^0 के कोण के सामने वाली भुजा **कर्ण** कहलाती है। तथा अन्य दो भुजाएँ आधार एवं लम्ब कहलाती है।समकोण त्रिभुज में आधार के साथ लम्ब 90^0 का कोण बनाता है।

महर्षि बौधायन- बौधायन भारत के प्राचीन गणितज्ञ और शुल्बसूत्र तथा श्रौतसूत्र के रचियता थे । समकोण त्रिभुज से सम्बन्धित पाइथागोरस प्रमेय सबसे पहले महर्षि बौधायन की देन है । पाइथागोरस (540 ई. पूर्व) से 460 वर्ष पूर्व बौधायन (1000 ई. पूर्व) उपर्युक्त सिद्धान्त का पूर्णतया प्रतिपादन कर चुके थे । **(बौधायन शुल्बसूत्र** 1.48) का यह निम्नलिखित सूत्र है ।

सूत्र – **दीर्घचतुरश्रस्याक्ष्णयारज्जु: पार्श्वमानी तिर्यङ्मानी**
च यत्पृथग्भूते कुरुतस्यदुभयं करोति ।

अर्थात् समकोण त्रिभुज के कर्ण पर कोई रस्सी तानी जाय तो उस बने वर्ग का क्षेत्रफल, ऊर्ध्व तथा क्षैतिज भुजा पर बने वर्ग के क्षेत्रफल योग के बराबर होता है ।



बौधायन प्रमेय –

समकोण त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाईयों के वर्गों का योग कर्ण की लम्बाई के वर्ग के बराबर होता है ।

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

या

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- परम्परा से इस प्रमेय की खोज का श्रेय यूनान के गणितज्ञ पाइथागोरस को दिया जाता है जबकि यह प्रमाण है कि प्रमेय की जानकारी उससे पूर्व तिथि की है। **भारत के प्राचीन ग्रन्थ बौधायन शुल्बसूत्र ये यह प्रमेय दिया हुआ है** और भी कई प्रमाण हैं, बेबीलोन के गणितज्ञ भी इस सूत्र के सिद्धान्त को जानते हैं। इसे **बौधायन (पाइथागोरस) प्रमेय** भी कहते हैं ।

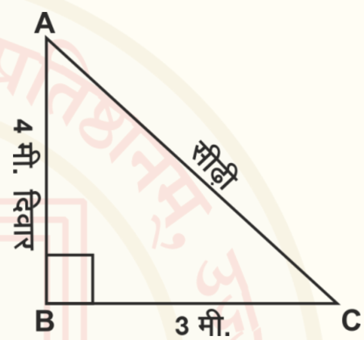
आइए , उदाहरणों के माध्यम से प्रश्नों को हल करना सीखें।

उदाहरण : एक सीढ़ी की एक दीवार से इस प्रकार लगाकर रखा है कि उसका आधार दीवार से 3 मी. की दूरी पर रहता है और उसका शीर्ष जमीन से 4 मी. की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की पर लगा है । सीढ़ी की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।

हल : माना AC सीढ़ी है और AB दीवार है। जिसमें खिड़की A है ।

यहाँ आधार BC = 3 मी. और लम्ब AB = 4 मी. है ।

तब, बौधायन प्रमेय से -



(कर्ण)^2 = (लम्ब)^2 + (आधार)^2

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

या $(AC)^2 = (4)^2 + (3)^2$

या $(AC)^2 = 16 + 9$

या $(AC)^2 = 25$

या $AC = \sqrt{25} = 5$ मी.

अत: सीढ़ी की लम्बाई 5 मी. है ।

अभ्यास प्रश्नावली - 7

1. निम्न में सही-विकल्प का चयन करें।

(अ) एक समकोण त्रिभुज में यदि समकोण बनाने वाली एक भुजा 6 cm और कर्ण 10cm तो अन्य भुजा की लम्बाई क्या होगी ?

I) 8 cm II) 10 cm III) 12 cm IV) 6 cm

(ब) पाइथागोरस प्रमेय केवल ________ त्रिभुजों पर लागू किया जा सकता है।

I) समद्विबाहु II) समकोण

III) समद्विबाहु एवं समकोण IV) समबाहु

(स) समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा .... होती है।

I) कर्ण II) आधार III) लम्ब IV) इनमें से कोई नहीं

2. बौधायन प्रमेय का कथन लिखिए।

3. निम्न रिक्त-स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(समकोण, कर्ण, आधार, लम्ब)

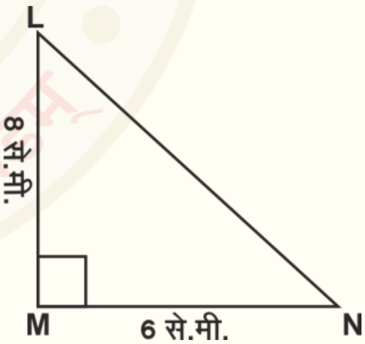
अ) समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने वाली भुजा को............ कहते हैं। जो समकोण त्रिभुज की सबसे लम्बी भुजा होती है।

ब) समकोण त्रिभुज में कर्ण को छोड़कर अन्य दो भुजा लम्ब एवं आधार मिलकर कितने अंश का कोण.........बनाते हैं ?

स) समकोण के संलग्न क्षैतिज भुजा को..............कहा जाता है।

द) समकोण के संलग्न ऊर्ध्वाधर भुजा को................कहा जाता है।

4. त्रिभुज LMN में कोण M समकोण है। यदि लम्ब (LM) = 8 से.मी. व आधार (MN) = 6 से.मी. हो तो कर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



7. एक समकोण ABC में, भुजा AB=12 मीटर तथा BC=5 मीटर और कोण ABC=90°है तब AC भुजा का माप ज्ञात कीजिये।

अध्याय 8

हीरोन का सूत्र

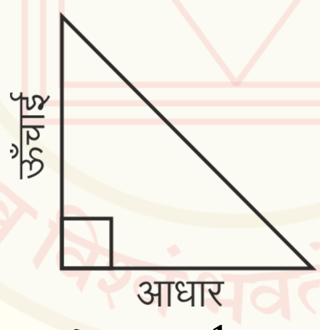
➢ तीन रेखाओं से घिरी आकृति **त्रिभुज** कहलाती है । यह एक बन्द आकृति से घिरा हुआ भाग समतल का **क्षेत्र** कहलाता है ।

आइए , पूर्व में किये गये अभ्यास को दोहराते हैं ।

त्रिभुज का क्षेत्रफल – त्रिभुजाकार Δ आकृति द्वारा घरे गये क्षेत्र को **त्रिभुज का क्षेत्रफल** कहते हैं ।

ध्यान रहे : त्रिभुज के आधार एवं ऊँचाई का मात्रक मीटर (m.)या सेण्टीमीटर(c.m.) इत्यादि लिखा लिया जाता है किसी समतल आकृति त्रिभुज के क्षेत्रफल को मापने का मात्रक वर्ग मीटर (m^2)या वर्ग सेण्टीमीटर(cm^2) इत्यादि लिया जाता है

समकोण त्रिभुज -



$$\textbf{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \textbf{आधार} \times \textbf{ऊँचाई}$$

➢ उपर्युक्त सूत्र के द्वारा हम समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात सकते है, या जब त्रिभुज का आधार एवं ऊँचाई दी हो तब यह सूत्र प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण: त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि ऊँचाई 4 से.मी. एवं आधार 5 से.मी. हो।

हल : दिया है आधार = 5 से.मी., ऊँचाई = 4 से.मी.

हम जानते हैं,

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ **आधार** $\times$ **ऊँचाई**

$= \frac{1}{2} \times 5$ से.मी. $\times$ 4 से.मी.

$= \frac{20}{2}$

$= 10$ से.मी.^{2}

अत: त्रिभुज का क्षेत्रफल 10 से.मी.^{2} है ।

हीरोन का सूत्र –

त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई का माप दिया हो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल हम हीरोन के सूत्र से ज्ञात करते हैं । हीरोन का सूत्र, ब्रह्मगुप्त के (**ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त,गणिताध्याय,** 12.21) सूत्र की एक विशेष स्थिति है। किसी चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ a, b, c, तथा d हो तो जिसका क्षेत्रफल सूत्र-

$$\sqrt{\boldsymbol{s\,(s-a)(s-b)(s-c))(s-d)}}$$

हीरोन का सूत्र, ब्रह्मगुप्त के सूत्र की एक विशेष स्थिति है जब $d = 0$. क्योंकि एक भुजा के शून्य हो जाने पर चतुर्भुज, त्रिभुज बन जाता है और प्रत्येक त्रिभुज 'चक्रीय' है। (सभी त्रिभुजों के तीनों शीर्षों से होकर वृत्त खींचा जा सकता है।)

सर्वदोर्युतिदलं चतु:स्थितं बाहुभिर्विरहितं च तद्घघात्।

मूलमस्फुटफलं चतुर्भुजे स्पष्टमेवमुदितं त्रिबाहुके।।

(लीलावती गणित क्षेत्रव्यवहार: पृ. 217)

अर्थात् त्रिभुज और चतुर्भुज के सभी भुजाओं के योगार्ध को क्रमश: तीन और चार जगहों (भुजाओं) में रखकर उनमें क्रम से प्रत्येक भुज को घटाकर जो शेष बचे उन सभी के गुणनफल का मूल लेने से त्रिभुज और चतुर्भुज का क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ क्रमश: a, b व c हो तो-

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{\boldsymbol{s}\,(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{c})}$

यहाँ s = अर्द्धपरिमाप है तथा a, b एवं c त्रिभुज की भुजाएँ है ।

जहाँ $\quad \mathbf{s} = \frac{\boldsymbol{a+b+C}}{\mathbf{2}} = \frac{\text{त्रिभुज का परिमाप}}{\mathbf{2}} =$ **त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप**

उदाहरण: त्रिभुजाकार पार्क की भुजाएँ 8 से.मी., 15 से.मी., 17 से.मी. है तब क्षेत्रफल ज्ञात करें ।

हल: दिया है-त्रिभुज की भुजाएँ a= 8 से.मी., b=15 से.मी., c=17 से.मी.

त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप (s) = $\frac{a+b+C}{2} = \frac{8+15+17}{2} = \frac{40}{2}$ = 20 से.मी.

अब $\quad (s - a) = (20 - 8) = 12$ cm

$(s - b) = (20 - 15) = 5$ cm

$(s - c) = (20 - 17) = 3$ cm

त्रिभुजाकार पार्क का क्षेत्रफल = $\sqrt{\boldsymbol{s}\,(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{c})}$

$= \sqrt{20 \times 12 \times 5 \times 3}$

$= \sqrt{100 \times 36}$

$= \sqrt{3600}$

या $= \sqrt{100} \times \sqrt{36}$

$= 10 \times 6 = 60$ वर्ग से.मी.

अभ्यास प्रश्नावली - 8

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प चयन करें।

(अ) हीरोन का सूत्र है –

(I) $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$ (II) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(III) $\frac{-a+b+c}{2}$ (IV) इनमें से कोई नहीं।

(ब) एक त्रिभुज की भुजाएँ 40m, 24m और 32m की हैं, तो इस त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप है -

(I) 48m (II) 96m (III) 24m (IV) 32m

(स) एक त्रिभुज की भुजाएँ 15m, 11m और 6m हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है –

(I) $10\sqrt{2}\ m^2$ (II) $20\sqrt{2}\ m^2$ (III) $30\sqrt{2}\ m^2$ (IV) $40\sqrt{2}\ m^2$

2. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें- $\left(\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}\right)$

अ) एक त्रिभुज का आधार 20 से.मी. तथा ऊँचाई 3 से.मी. है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

ब) उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसका आधार 4 से.मी. एवं ऊँचाई 5 से.मी. हो।

4. हीरोन के सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। हीरोन का सूत्र -
$\left(\text{जहाँ त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}\right)$

अ) त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका अर्द्धपरिमाप 16 से.मी. है एवं भुजाएँ 8 से.मी., 11 से.मी. एवं 13 से.मी. हो ।

ब) उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 6 से.मी., 10 से.मी. व 14 से.मी. है एवं त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप 15 से.मी. हो।

अध्याय 9

घन और घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

ईट **माचिस** **चॉक बाक्स** **पेटी**

उपर्युक्त बताइये गई सभी वस्तुओं का निश्चित आकार तथा आयतन होता है ये सभी ठोस आकृतियाँ है (त्रिविमिय आकृतियाँ) है अर्थात् इनकी लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई होती है।

पृष्ठीय क्षेत्रफल - किसी ठोस आकृतियों के पृष्ठीय का क्षेत्रफल से तात्पर्य **समस्त पृष्ठों के क्षेत्रफल** का योग से हैं ।

आयतन -किन्हीं ठोस आकृतियाँ के द्वारा जितना स्थान घेरा जाता है। वह उसका **आयतन** कहलाता है।

ध्यान रहे - क्षेत्रफल को वर्ग इकाई और आयतन को घन इकाई में मापा जाता है ।

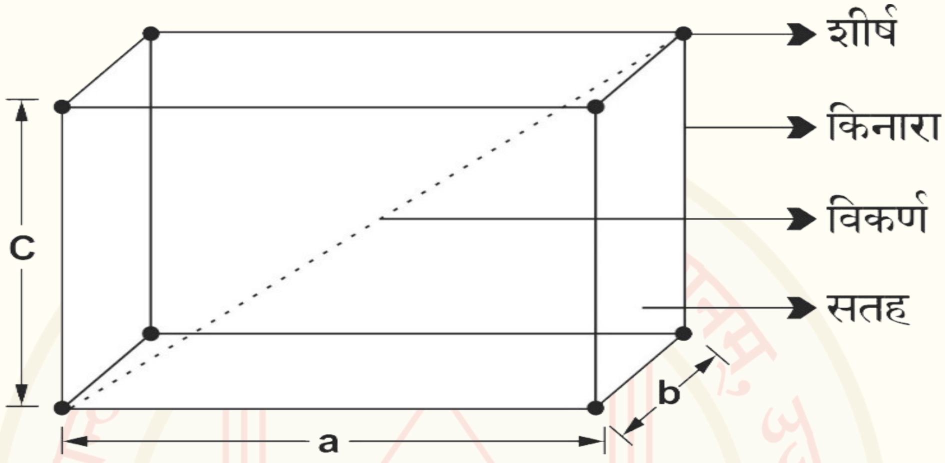
❖ बटुकों ! अपने गुरुजी से चर्चा करें क्षेत्रफल को वर्ग इकाई तथा आयतन को घन इकाई में क्यों मापते हैं ?

घनाभ (आयताकार ठोस) - घनाभ के गुणधर्म –

1) इसकी सभी सतहें आयताकार है ।

2) घनाभ के 8 शीर्ष (कोने), 12 कोने (दो शीर्षों को जोड़ने वाली रेखा) और 6 सतहें (यानि कि 3 जोड़ी) एवं 4 विकर्ण होते हैं ।

3) प्रत्येक सतह के सामने सतह के समान्तर होती है ।



जहाँ, a = लम्बाई , b = चौड़ाई c = ऊँचाई है।

घनाभ में आमने-सामने की सतहे परस्पर समान होती है। घनाभ का पृष्ठीय ज्ञात करने के लिए इसके छ: फलकों का क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा ।

1) **घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल** = 2 [ab + bc + ca] **वर्ग इकाई**

2) **घनाभ का विकर्ण** = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

उदाहरणार्थ प्रश्न –

उदाहरण 1 : एक कमरे की लम्बाई 3 मी. , चौड़ाई 2 मी. तथा ऊँचाई 4 मी. है तो कमरे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें ।

हल : कमरे की लम्बाई = 3 मी., चौड़ाई = 2 मी., ऊँचाई = 4 मी.

कमरे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल =

= **2 [लम्बाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + ऊँचाई × लम्बाई]**

$= 2 [3 \times 2 + 2 \times 4 + 4 \times 3]$

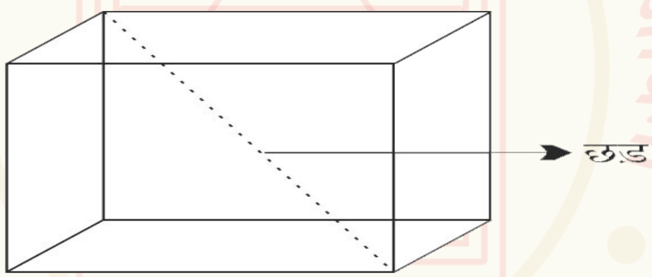
$= 2 [6 + 8 + 12]$

$= 2 [26]$

= 52 वर्ग मीटर

अत: कमरे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 52 वर्ग मीटर हैं ।

उदाहरण 2 : 3 से.मी., 2 से.मी. एवं 1 से.मी. ऊँचे बॉक्स में अधिक से अधिक कितनी लम्बी छड़ (पेन्सिल) रखी जा सकती है ।



हल : बॉक्स की लम्बाई = 3 से.मी., चौड़ाई = 2 से.मी., ऊँचाई = 1 से.मी.

बॉक्स में अधिक से अधिक रखी जाने वाली छड़ (पेन्सिल) बॉक्स के विकर्ण के बराबर है । अत: छड़ की लम्बाई

बॉक्स (घनाभ) का विकर्ण $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

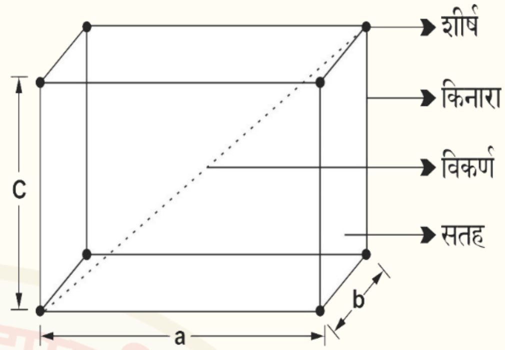
$= \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}$

$= \sqrt{9 + 4 + 1}$

$= \sqrt{14}$ से.मी.

घन– घनाभ में लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई यदि आपस में बराबर है तो वह **घन** कहलाता है।

यहाँ a = लम्बाई, b = चौड़ाई व c = ऊँचाई है ।



अर्थात्

लम्बाई (a) = चौड़ाई(b) = ऊँचाई(c) = a (एक भुजा)

इस स्थिति में सभी सतहें आपस में बराबर और वर्ग होती है एक भुजा (a) **घन की एक कोर** कहलाती है ।

घन के विकर्ण की लम्बाई -

घन का विकर्ण $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$

$= \sqrt{3a^2}$

$= a\sqrt{3}$

घन का विकर्ण = a√3 इकाई या = भुजा √3 इकाई

घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल –

घन की छ: सतहें (सभी सतहें) वर्गाकार होती है अत: लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई आपस में बराबर होंगे । अर्थात् a = b = c = a (एक भुजा)

घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 × एक पृष्ठ का क्षेत्रफल

= 6 × (भुजा × भुजा)

$= 6$ (भुजा^{2})

$= 6 (a)^2$ वर्ग इकाई

उदाहरण : एक घन की एक कोर (भुजा) 2 मी. है । घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है - घन की एक कोर भुजा = 2 मी.

अतः **घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 (भुजा)^2**

$= 6 (2)^2$

$= 6 (4)$

= 24 वर्ग मी.

उदाहरण : एक घन की कोर 2 से.मी. है तो घन का विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है - घन की कोर (भुजा) $a = 2$ से.मी.

अतः **घन का विकर्ण = $a\sqrt{3}$**

$= 2\sqrt{3}$ से.मी.

अतः घन के विकर्ण की लम्बाई $2\sqrt{3}$ से.मी.है

घन और घनाभ का आयतन –

किसी वस्तु की धारिता उस वस्तु के अन्दर भरे जाने वाले द्रव का आयतन होता है । इसका मात्रक घन मात्रक है ।घन व घनाभ आयतन निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। **घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई**

$= a \times b \times c$

घनाभ का आयतन = abc घन इकाई

घन का आयतन –

चूँकि घन की लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई बराबर होती है। अत: घनाभ के आयतन में $a = b = c = a$ (समान भुजा) अत: घन का आयतन $= a \times a \times a$

घन का आयतन $= a^3$ घन इकाई

आयतन सम्बन्धित इकाई –

आप दैनिक जीवन में पानी की टंकी के घन एवं घनाभ आकृति में कितना पानी है? यह सरलता से पता कर सकते हैं।

1 लीटर = 1000 घन से.मी.

1000 लीटर = 1 घन मीटर = 1 किलो लीटर

1 घन से.मी. = 1000 घन मि.मी.

1 घन मीटर = 1000000 घन से.मी.

उदाहरणार्थ प्रश्न –

उदाहरण : एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 15 से.मी. × 12 से.मी. × 10 से.मी. है घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : **घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई**

= 15 × 12 × 10 घन से.मी.

= 1800 घन से.मी. या 1800 $(\text{से.मी.})^3$

उदाहरण : एक घन की एक कोर 5 मी. है तो घन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है - एक भुजा (कोर) = 5 मी.

तब **घन का आयतन $= a^3$**

$= 5^3$ घन मी.

$= 5 \times 5 \times 5$ घन मी.

$= 125$ घन मी.

उदाहरण : एक घनाभाकार पानी की टंकी है जिसकी लम्बाई 600 से.मी., चौड़ाई 500 से.मी. एवं गहराई 200 से.मी. है। उसमें कितने लीटर पानी आ सकता है।

हल : दिया है - घनाभकार टंकी की लम्बाई = 600 से.मी.

चौड़ाई = 500 से.मी.

गहराई (ऊँचाई) = 200 से.मी.

टंकी (घनाभकार) का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × गहराई(ऊँचाई)

$= 600 \times 500 \times 200$

$= 6,00,00,000$ घन से.मी.

1 लीटर = 1000 घन से.मी.

$\frac{1}{1000}$ लीटर = 1 घन से.मी.

$= \frac{6,00,00,000}{1,000}$ लीटर

= 60,000 लीटर

अत: टंकी में 60,000 लीटर पानी भरा जा सकता है।

अभ्यास प्रश्नावली - 9

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों के सही विकल्प का चयन करें।

(अ) एक घन जिसका किनारा a है घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = ... वर्ग इकाई है-

(I) a^2 (II) $4a^2$ (III) $6a^2$ (IV) a^3

(ब) एक घन जिसका किनारा a है तो घन का विकर्ण = ...

(I) $a\sqrt{3}$ (II) $a^2\sqrt{3}$ (III) $\frac{\sqrt{3}}{a}$ (IV) $\frac{a}{\sqrt{3}}$

(स) एक घनाभ जिसकी लम्बाई ,चौड़ाई एवं ऊँचाई क्रमश: a,b एवं c है तब घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = ... वर्ग इकाई है-

(I) 2 [ab + bc + ca] (II) 2 [ab + bb + ca]

(III) 2 [a + b + c] (IV) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

- **घनाभ –**

2. एक घनाभकार डिब्बे की लम्बाई 3 मी., चौड़ाई 2 मी. एवं ऊँचाई 3 मी. है तो डिब्बे का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

3. एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई क्रमश: 2 से.मी., 1 से.मी. और 4 से.मी. है घनाभ का पृष्ठीय ज्ञात कीजिए ?

- **घन –**

6. एक घनाकार चॉक के डिब्बे कि लम्बाई 4 से.मी. है तो चॉक के डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

7. यदि एक घन की कोर 3 मी. है तो घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं घन का विकर्ण ज्ञात कीजिए ?

1. घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए ? जिसकी लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई निम्नलिखित हैं।

   अ) लम्बाई = 3 मी., चौड़ाई = 4 मी., ऊँचाई = 2 मी.

   ब) लम्बाई = 1 से.मी., चौड़ाई = 5 से.मी., ऊँचाई = 3 से.मी.

2. घन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा या एक कोर निम्नलिखित है ।

   अ) 4 मी. ब) 5 मी. स) 6 से.मी. द) 10 से.मी.

4. एक आयतकार पानी की टंकी 8 मी. × 7 मी. × 1 मी. तक भर जाती हैं ।

   अ) टंकी में कितने घन मीटर पानी आएगा ?

   ब) टंकी में कितने लीटर पानी आएगा ?

5. एक घनाकार टंकी की कोर 100 से.मी. है तो बताइये टंकी में कितने लीटर पानी भरा जा सकता है ?

अध्याय – 10

सांख्यिकी

- आंकड़ों का हम अपनी इच्छानुसार अर्थपूर्ण सूचनाएँ उपलब्ध करने का अध्ययन गणित की जिस शाखा में किया जाता है । उसे **सांख्यिकी** कहा जाता है।

आंकड़ों का संग्रह – आंकड़ों को संग्रह करने के आधार पर दो भागों में विभाजित किया जा सकता है । 1) प्राथमिक आंकड़े 2) द्वितीयक आंकड़े

1. **प्राथमिक आंकड़े** – ऐसे आंकड़े जिन्हें नवीन सिरे से पहली बार एकत्रित किया जाता है । तो उन्हें **प्राथमिक आंकड़े** कहते हैं । **जैसे** – गुरुकूल में वेद भूषण चतुर्थ वर्ष के बालकों का भार, लम्बाई इत्यादि ।

2. **द्वितीयक आंकड़े** – वे आंकड़े जिनका पहले से सङ्कलन किया हुआ हो और प्रकाशित या अप्रकाशित (कई संस्थाओं द्वारा आंकड़े एकत्रित किये जाते परन्तु प्रकाशित नहीं होते हैं।) ऐसे सामग्री में फाइलों, रजिस्टरों, प्रलेखों आदि से प्राप्त की जाती है । इस स्थिति को **द्वितीयक आंकड़े** कहलाते हैं ।

आंकड़ों का प्रस्तुतिकरण – आंकड़ों को एकत्रित करने के बाद उनके प्रस्तुतिकरण को अर्थपूर्ण एवं सरलता से समझा जा सके इसलिए आंकड़ों को प्रस्तुतिकरण के आधार पर भी दो भागों में विभाजित किया जाता है । 1) अवर्गीकृत आंकड़े 2) वर्गीकृत आंकड़े

1) अवर्गीकृत आंकड़े – जब संकलित (एकत्रित) आंकड़े जिस रूप में एकत्रित किए जाए उसी रूप में प्रस्तुत कर दिये जाएँ ,तो उन्हें **अवर्गीकृत आंकड़े** कहा जाता है ।

जैसे : वेद भूषण चतुर्थ के 10 बटुकों के प्राप्तांक इस प्रकार हैं ।

9 , 7 ,8 , 6 , 5 , 7 , 7 , 8 , 9 , 8

2) **वर्गीकृत आंकड़े** – जब संकलित आंकड़ों को सही रूप से समझने, अध्ययन करने के लिए सही प्रस्तुतिकरण आवश्यक होता है। इसके लिए प्राप्त आंकड़ों को शीर्षकों के अनुसार विभाजित कर प्रस्तुत किया जाए तो उन्हें **वर्गीकृत आंकड़े** कहा जाता है। यह प्रस्तुतिकरण वर्गीकरण कहलाता है ।

आवृत्ति – आंकड़ों की जितनी बार पुनरावृत्ति होती है । उसे आंकड़ों की **आवृत्ति** कहते हैं

आवृत्ति को सङ्केत ‘ f ’ से दर्शाते हैं ।

प्रेक्षण – संकलित आंकड़ों के प्रत्येक मान को **प्रेक्षण** कहा जाता है ।

जैसे : 2, 4, 7, 7, 6, 9, 1, 5 में प्रेक्षणों की संख्या 8 है ।

परिसर –

प्रेक्षणों के अधिकतम एवं न्यूनतम मान के अन्तर को **परिसर** (परास) कहा जाता है।

परिसर = अधिकतम मान – न्यूनतम मान

उदाहरण : निम्न आंकड़ों का परिसर ज्ञात कीजिए ।

6 , 12 , 21 , 25 , 91 , 57

हल : न्यूनतम मान = 6, अधिकतम मान = 91

अत: **परिसर = अधिकतम मान – न्यूनतम मान**

= 91 – 6

= 85

आवृत्ति सारणी – जब संकलित आंकड़ों को सर्वप्रथम आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित कर उसे सारणी में प्रस्तुत करते हैं तो इस सारणी को **आवृत्ति सारणी** कहा जाता है ।

टेली चिह्न (मिलान चिह्न) –

किन्हीं अवर्गीकृत आंकड़ों के सङ्कलन में आंकड़े की आवृत्ति चिह्नित करने के लिए संख्या के आगे उतनी ही खड़ी रेखाखण्ड खींच दी जाती हैं परन्तु यह सिर्फ चार रेखाओं तक ही किया जाता है,पांचवी बार संख्या के आने पर पूर्व की चार रेखाओं को तिर्यक् रेखा से काट (~~||||~~) दिया जाता है । छठी बार में पुन: आगे तक खड़ी रेखा (~~||||~~ ।) खींच दी जाती है । ऐसा करने से मिलान चिह्न की गणना सरल हो जाती है।

- आंकड़ों की संख्या बहुत अधिक हो तो आंकड़े को समूह में रखकर छोटा कर लेते हैं। इन समूहों को **वर्ग** (Classes) कहा जाता है और इनके माप को वर्ग अन्तराल का वर्गमाप कहा जाता है प्रत्येक वर्ग की निम्नतम संख्या को **निम्न वर्ग सीमा** (Lower Class Limit)और अधिकतम संख्या को **ऊपरी वर्ग सीमा** (Upper Class Limit) कहा जाता है।

उदाहरण : एक पाठशाला में चारों वदों के बटुकों की संख्या 30 है प्रत्येक विद्यार्थी ने पाठशाला के आस-पास 50 पौधे लगाए, दो माह बाद लगाए गए पौधों में से पौधे की संख्या निम्न है। 15, 17, 18, 12, 34, 34, 35, 43, 18, 29, 23, 40, 35, 25, 26, 28, 13, 10, 3, 4, 3, 0, 14, 25, 25, 0, 2, 47, 19, 20

हल:

नये पौधों की संख्या	मिलान चिह्न	आवृत्ति
0 – 10	~~||||~~ |	6
10 – 20	~~||||~~ ||||	9
20 – 30	~~||||~~ |||	8
30 – 40	||||	4
40 – 50	||	3
		$\sum f = 30$

आंकड़ों के प्रस्तुतिकरण की इस विधि को **वर्गीकृत आवृत्ति सारणी** कहा जाता है। इस सारणी में सरलता देखकर हम आसानी से अनुमान लगा सकते हैं एवं निष्कर्ष निकाल सकते हैं ।

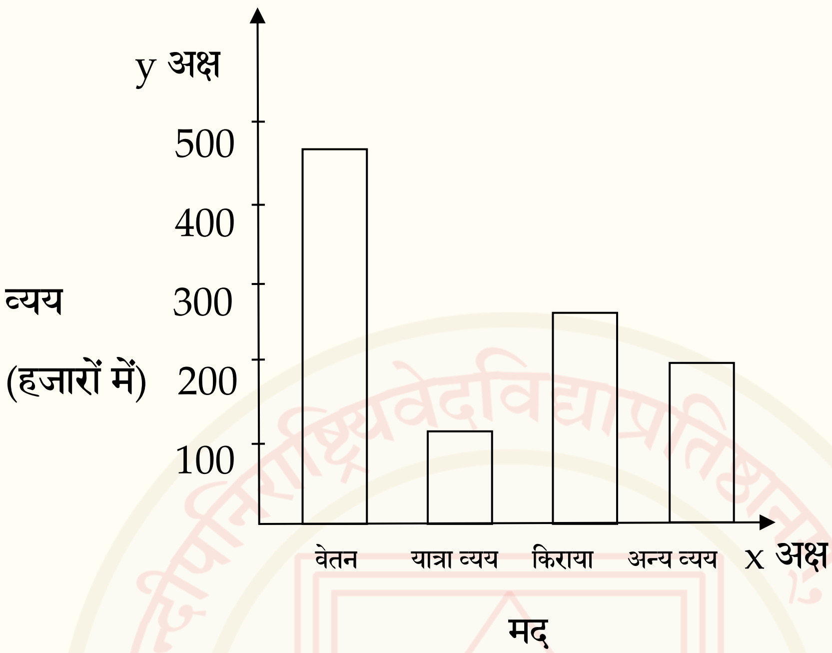
सांख्यिकी आंकड़ों का चित्रीय निरूपण –आंकड़ों को सचित्र प्रस्तुत कर हम इनके प्रस्तुतिकरण की ऐसी व्यवस्था करते हैं जो न सिर्फ देखने में अच्छी लगे वरन् अध्ययन में सुविधा भी प्रदान करें । आइये ,दण्ड रेखाचित्र के बारे अध्ययन करते हैं ।

1) **दण्ड रेखाचित्र** (Bar Graph) – इसके द्वारा किसी एक निकाय से सम्बन्धित सांख्यिकी आंकड़ों को दण्ड रेखा चित्रों के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है । इस चित्रीय निरूपण में समान चौड़ाई के दण्ड 'x'अक्ष पर तथा ऊँचाई 'y'अक्ष के समान्तर दिए आंकड़ों के अनुसार खींचे जाते हैं । आइए , उदाहरण के माध्यम से दण्ड आलेख बनाना सीखते हैं ।

उदाहरण : एक व्यावसायिक प्रतिष्ठान में विभिन्न मदों में निम्नानुसार व्यय (खर्च) हुआ इसको दण्ड आलेख द्वारा दर्शाइये ।

मद	व्यय (हजारो में)
वेतन	400
यात्रा व्यय	100
किराया	250
अन्य व्यय	200

हल : दण्ड रेखा चित्र (आलेख) में दण्ड की चौड़ाई तथा 'x' अक्ष पर दण्डों के बीच की दूरी से चित्र को स्पष्ट एवं समझने योग्य बनाते हैं ।



आयत चित्र (Histograph)– आयत चित्र वर्गीकृत एवं सतत् बारम्बारता (आवृत्ति) आंकड़ों का आयतीय निरूपण है। जिसमें वर्ग अन्तराल होते हैं तथा आयतों की ऊँचाई उन वर्गों की बारम्बारता (आवृत्ति) के अनुसार होती है ।

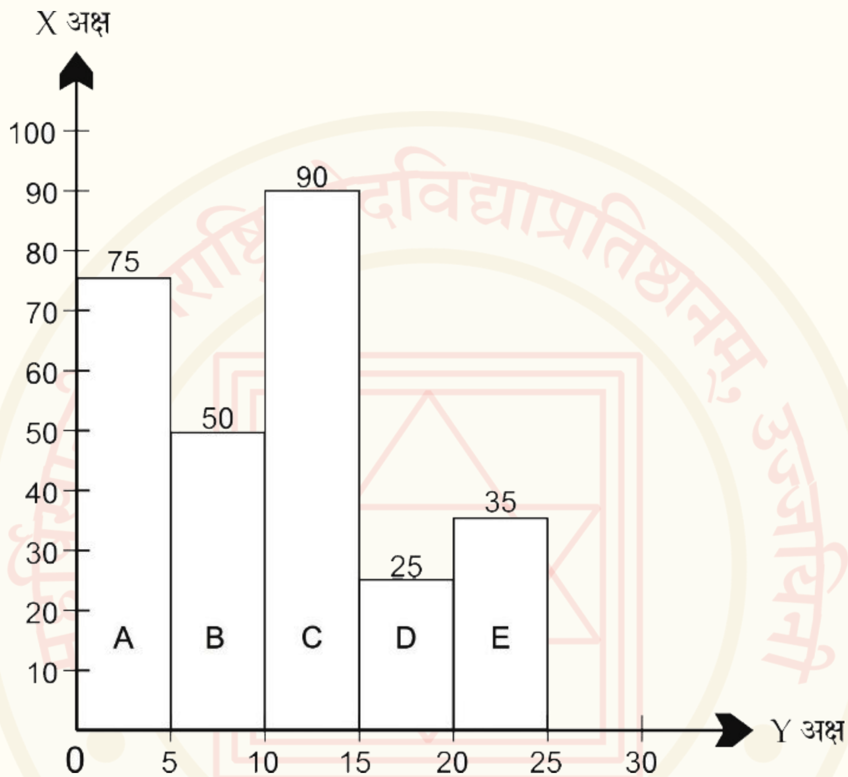
उदाहरण :एक पाठशाला में भिन्न-भिन्न के आयु के विद्यार्थियों की संख्या निम्नानुसार है ।

आवृत्ति सारणी का आयत चित्र बनाईये ?

वर्ष (आयु वर्षों में)	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 - 25
विद्यार्थियों की संख्या	75	50	90	25	35

यहाँ आवृत्ति सारणी वर्गीकृत एवं सतत् है तथा वर्ग अन्तराल भी समान है अत:'x' अक्ष पर वर्ग अन्तराल अर्थात् आयु वर्षों में अंकित करेंगे ।

हल : अब चूँकि (0 – 5) वर्ग अन्तराल में विद्यार्थियों की संख्या 75 है अत: आवृत्ति सारणी के सामने 'x' अक्ष के समान्तर रेखा खींचकर वर्ग अन्तराल 0 – 5 पर आयत A की रचना करेंगे । इसी प्रक्रिया में आयत B, C, D,E का निर्माण करेंगे ।

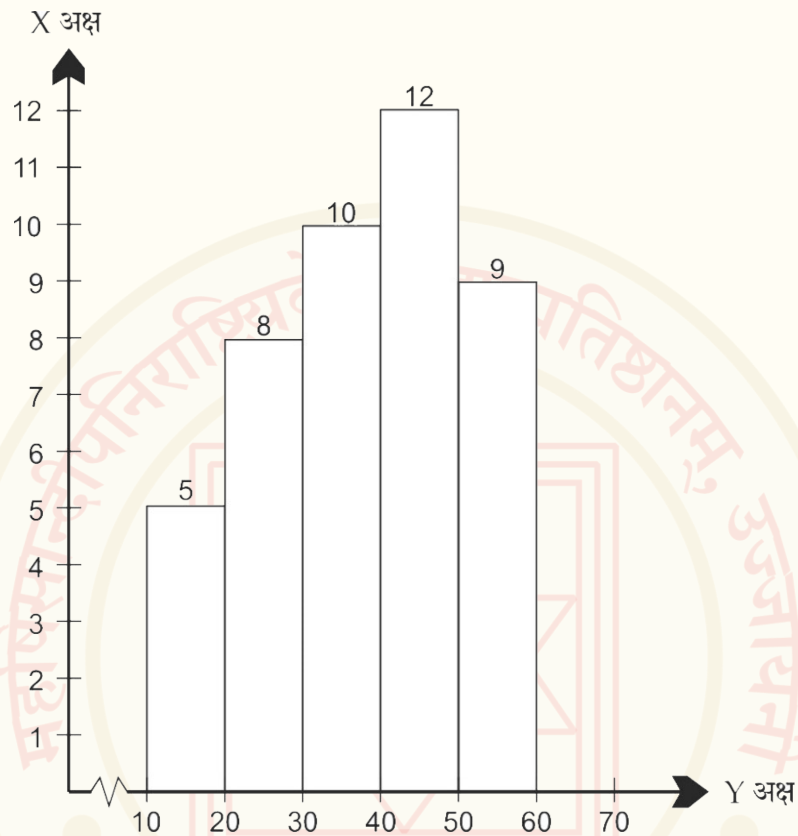


अत: यह स्पष्ट है इन सभी आयतों में 1 से.मी. और ऊँचाई बारम्बारता (आवृत्ति) के बराबर है इसलिए आयतों क्षेत्रफल बारम्बारता (आवृत्ति) के समानुपात होगा।

उदाहरण : आयत चित्र की सहायता से निम्न को दर्शाइये ।

वर्ग	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
संख्या	5	8	10	12	9

हल : यहाँ वर्गीकरण को 'x' अक्ष पर पैमाना 10 इकाई = 1से.मी. तथा 'y' अक्ष पर पैमाना 1 इकाई = 0.5 से.मी. लेकर चित्र में दर्शाये अनुसार आयत बनाए जा सकते हैं ।



ध्यान रखें :- किंक का चिह्न तब प्रयोग किया जाता है,जब वर्ग अन्तराल शून्य से प्रारम्भ न हो ।

अभ्यास प्रश्नावली - 10

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प का चयन करें-

(अ) मिलान चिह्न IIII IIII III की बारम्बारता है-

(I) 5 (II) 10 (III) 13 (IV) 15

(ब) 9,7,3,5,11,3,13,5,6,3,9,10,5,9,7,5 में 5 की बारम्बारता है-

(I) 1 (II) 2 (III) 3 (IV) 4

(स) वर्ग अन्तराल 15-25 की उच्च सीमा है-

(I) 15 (II) 25 (III) 40 (IV) 20

(द) आंकड़ों के अधिकतम और न्यूनतम मानों के अन्तर को क्या कहा जाता है-

(I) परिसर (II) निम्नसीमा (III) ऊपरीसीमा (IV) बारम्बारता

2. आंकड़ों का संग्रह से आप क्या समझते हैं ?

3. आवृत्ति किसे कहते हैं ?

4. प्रेक्षण को स्पष्ट कीजिए ?

5. परिसर = ... – ....

6. वेद भूषण चतुर्थ वर्ष के 20 छात्रों का भार किलोग्राम में निम्नलिखित है ?

17, 20, 32, 30, 25, 27, 28, 29, 18, 21, 23, 23, 24, 25, 25,

28, 18, 17, 30, 25 उपर्युक्त आंकडे को सारणी बद्ध रूप में लिखिये ।

7. एक राजधानी एक्सप्रेस रेलगाड़ी विभिन्न राज्यों में निम्न संख्या में स्टेशनों पर रूकती है ।

राज्य	म.प्र.	गुजरात	उत्तरप्रदेश	उत्तराखण्ड
रेलगाड़ी के रुकने की संख्या	5	4	7	2

उपर्युक्त आंकड़ों का दण्ड आलेख बनाइये ।

8. निम्न आवृत्ति सारणी का आयत चित्र बनाइए ।

वर्ग	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
आवृत्ति	5	10	20	15

अध्याय 11

प्रायिकता

- ‘प्रायिकता’ के द्वारा हम ‘सम्भवत:’ एवं संदेह वाले प्रश्नों कि अनिश्चितता का संख्यात्मक रूप से मापन कर सकते हैं। **प्रायिकता द्वारा किसी घटना के घटित होने के सम्भावनाओं का परिणाम बोधक या संख्यात्मक निरूपण करते हैं ।** दूसरे शब्दों से अनिश्चितता की गणना को **प्रायिकता** कहते हैं यह किसी घटना के होने सम्भावना का माप है ।

प्रायिकता किसी घटना के घटित होने का संख्यात्मक मान है । मान लीजिये E कोई घटना है जिसके घटित होने की सम्भावना को हम निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं ।

$$P\ (E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}}$$

$$P\ (E) = \frac{n\ (E)}{n\ (S)}$$

एक सिक्के को उछालने पर दो ही सम्भावना (चित्त होगा या पट) थी । जहाँ $P\ (E_1)$ व $P\ (E_2)$ क्रमश: चित्त व पट आने की **प्रायिकता** कहते हैं । यहाँ, $P\ (E_1)$ व $P\ (E_2)$ के मानों का योग 1 होता है । अर्थात् $P\ (E_1) + P\ (E_2) = 1$

ध्यान रहे :- किसी प्रयोग में प्राप्त कुल घटनाओं की प्रायिकता का योग हमेशा 1 होता है ।

प्रयोग (यादृच्छिक प्रयोग) – एक क्रिया के अनेक सम्भव परिणामों वाला प्रयोग जिसमें में एक ओर केवल एक परिणाम का आना निश्चित हो । लेकिन परिणाम का सही पुर्वानुमान न हो तो **प्रयोग** कहलाता है ।

परिणाम : किसी प्रयोग के एक बार होने पर प्राप्त निष्कर्ष को **परिणाम** कहते हैं । उदाहरण के लिए एक सिक्के को उछालने के प्रयोग में दो संभावित परिणाम होते हैं चित्त या पट

घटना : किसी भी प्रयोग के एक या एक से अधिक परिणामों को **घटना** की संज्ञा दी जाती है । **जैसे** : एक पासा फेंकने पर समसंख्या की प्राप्ति ।

प्रतिदर्श बिन्दु :किसी प्रयोग के सभी सम्भावित परिणामों के समूह को उस प्रयोग का **प्रतिदर्श बिन्दु** कहते हैं ।

नीचे सारणी में प्रयोग के प्रतिदर्श समष्टि व प्रतिदर्श बिन्दुओं के बारे में बताया गया है ।

यादृच्छिक प्रयोग	प्रतिदर्श समष्टि	प्रतिदर्श बिन्दु
एक सिक्के को उछालना	S (H,T)	H, T
एक पासे को उछालना	S (1,2,3,4,5,6)	1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6
दो सिक्कों को एक साथ उछालना	S (H,H) (T,T) (H, T) (T, H)	(H,H),(T,T), (H,T), (T,H)

प्रायकिता के कुछ महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष

1) सभी सम्भावित परिणाम की प्रायिकताओं का योग 1 होता है ।

2) P (घटना का होना) + P (घटना का नहीं होना) = 1

या $P\,(E)\ +\ P\,(\bar{E})\ =\ 1$

3) किसी घटना की प्रायिकता हमेशा 0 और 1 के बीच होता है ।

$$0 \leq P\,(E) \leq 1$$

4) असम्भव घटना की प्रायिकता 0 और निश्चित घटना की प्रायिकता 1 होती है ।

प्रायिकता किसी घटना के घटित होने का संख्यात्मक मान है । इसे निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है ।

$$\boldsymbol{P\,(E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}}} \quad \textbf{या} \quad \boldsymbol{P\,(E) = \frac{n\,(E)}{n\,(S)}}$$

उदाहरण : एक साधारण पासे को फेंकने पर 3 से छोटे अङ्क प्राप्त होने की प्रायकिता ज्ञात कीजिए।

हल : प्रतिदर्श समष्टि S = (1,2,3,4,5,6)

परिणामों की कुल संख्या $n(s) = 6$

3 से छोटे अङ्क प्राप्त होने की घटना E = (1,2)

इसलिए, घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या $n(E) = 2$

अब,

$$\textbf{प्रायिकता } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$= \frac{2}{6} \text{ या } \frac{1}{3}$$

अत: 3 से छोटे अङ्क की प्रायकिता $\frac{1}{3}$ है।

अभ्यास प्रश्नावली - 11

1. निम्नलिखित बहुविकल्पीय प्रश्नों में से सही विकल्प का चयन करें।

(अ) निश्चित घटना की प्रायिकता का मान क्या है-

(I) 0 (II) $\frac{1}{2}$ (III) 1 (IV) $\frac{3}{2}$

(ब) यदि किसी घटना की प्रायिकता P(E) से निरूपित होता है तो-

(I) $P(E) \leq 0$ (II) $P(E) \leq 1$ (III) $0 \leq P(E) \leq 1$ (IV) $-1 \leq P(E) \leq 1$

(स) निम्न में कौन-सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती है -

(I) $\frac{1}{2}$ (II) $\frac{-1}{2}$ (III) $\frac{1}{4}$ (IV) 1

2. एक सिक्के के उछालने पर पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

3. एक पासे के फेंकने पर शीर्ष (ऊपर) 7 से अधिक अङ्क आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

4. एक सिक्का 15 बार उछालने पर 7 बार चित्त (हेड) प्राप्त होता है, तो हेड आने की प्रायिकता बताइये ।

5. यदि एक पासे के फेंकने पर सम अङ्क आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

6. एक पासे को फेंकने पर 8 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

7. एक पासा को दो बार फेंका जाता है, तो विषम संख्या आने की प्रायिकता है -

8. रिक्त-स्थानों की पूर्ति करें ।

अ) असम्भव घटना की प्रायिकता .... होती है ।

ब) प्रायिकता का मान हमेशा .... और .... के बीच होता है ।

स) निश्चित घटना की प्रायिकता .... होती है ।

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

द्वारा सञ्चालित एवं प्रस्तावित राष्ट्रीय आदर्श वेद विद्यालय

महर्षि सान्दीपनि राष्ट्रीय वेदविद्या प्रतिष्ठान, उज्जैन (म.प्र.)

(शिक्षा मन्त्रालय, भारत सरकार)

वेदविद्या मार्ग, चिन्तामण, पो. ऑ. जवासिया, उज्जैन - ४५६००६ (म.प्र.)

Phone : (0734) 2502266, 2502254, E-mail : msrvvpujn@gmail.com, website - www.msrvvp.ac.in